

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

24. Band, Heft 7

22. August 1941

S. 289—336

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra, Polynome:

Rados, Gustav: Die Faktorenerlegung einiger komplizierter Polynome aus der Theorie der Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. Mat. termézet. Értes. 59, 749—760 u. dtsh. Zusammenfassung 761—764 (1940) [Ungarisch].

Rados, Gustav: Die Faktorenerlegung zweier komplizierter n -variabliher Polynome. Mat. termézet. Értes. 59, 765—771 u. dtsh. Zusammenfassung 772—774 (1940) [Ungarisch].

Vier feste Punkte und ein fünfter veränderlicher Punkt $P(x, y)$ bestimmen im allgemeinen einen Kegelschnitt. Dieser besitzt einen Doppelpunkt bzw. ist eine Parabel, wenn die Gleichung 6. Grades $G(x, y) = 0$, bzw. die Gleichung 4. Grades $g(x, y) = 0$ erfüllt ist. Es ist geometrisch evident, daß die Polynome G und g in Faktoren 2. Grades zerfallen. Verf. hat sich das Ziel gesteckt, dieses Zerfallen algebraisch zu behandeln, sowie in entsprechender Weise bei Polynomen dreier Variablen (d. h. bei Flächen 2. Ordnung) und — in der zweiten Arbeit — bei Polynomen von n Variablen zu verfahren. Die Behandlung ist, auch abgesehen von manchen nicht genügend streng gefaßten Aussagen, nur als eine Skizze zu betrachten. Verf. bemerkt, daß im Fall $n = 2$ aus der erwähnten Faktorzerlegung die Möbiusschen Kriterien ableitbar sind, die es erlauben, aus den Koordinaten von fünf Punkten auf die Art des durch sie bestimmten Kegelschnittes zu schließen; er äußert die Ansicht, daß man auf diese Weise ein dreidimensionales Analogon dieser Kriterien finden kann. G. Hajós.

Mignosi, Giuseppe: Discussione nel corpo reale delle equazioni di 3° e 4° grado. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 76, 127—137 (1939).

Elementare Diskussion des Kurvenbildes einer rationalen Funktion 3. oder 4. Grades und darauf gründende Ableitung der Realitäts-, Vielfachheits- und Lagekriterien der Wurzeln. Harald Geppert (Berlin).

Kantz, Georg: Neue Herleitung der Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln eines normierten Polynoms n -ten Grades von x durch seine Koeffizienten. Deutsche Math. 5, 393—394 (1941).

Seien x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

und $s_i = \sum_{k=1}^n x_k^i$. Verf. gibt einen Beweis der Newtonschen Rekursionsformeln $s_i + a_1 s_{i-1} + a_2 s_{i-2} + \dots + i a_i = 0$, ohne Verwendung der abgeleiteten Polynome.

T. Popoviciu (Bucureşti).

Sebastião e Silva, José: Probleme über rationale Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Portugaliae Math. 2, 20—35 (1941) [Portugiesisch].

Bekannte Sätze über rationale Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung werden neu bewiesen und angewandt. Hauptsatz: Sind φ und ψ rationale Funktionen von x_1, \dots, x_n , ist die zu φ gehörige Substitutionsgruppe in der zu ψ gehörigen enthalten, und ist m die Anzahl der verschiedenen Funktionen, in die φ bei allen Permutationen der x_1, \dots, x_n übergeführt wird, dann ist $\psi = p(\varphi)$, wo $p(x)$ ein Polynom des Grades $\leq m - 1$ ist, dessen Koeffizienten symmetrische Funktionen der x_1, \dots, x_n sind. — Die x_1, \dots, x_n seien (verschiedene) Wurzeln einer algebraischen Gleichung $F(x) = 0$. Ist dann insbesondere $\varphi \equiv R(x_1)$, $\psi \equiv S(x_1)$, so folgt aus dem Hauptsatz, daß $S(x_i) = p(R(x_i))$ ($i = 1, \dots, n$) ist, wo $r(x)$ vom Grade $\leq n - 1$ ist und rationale

Koeffizienten hat. — Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ bei der symmetrischen Gruppe $n!$ wertig ($\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$), dann ist die irreduzible Gleichung mit den Wurzeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Galoisresolvente für $F(x)$. — Sind φ und ψ symmetrische Funktionen von p der n Wurzeln x_1, \dots, x_n , ist $f(x) = 0$ eine Gleichung mit diesen p Wurzeln, und sind $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ verschieden ($m = \binom{n}{p}$), dann sind die Koeffizienten von $f(x)$ ganze rationale Funktionen von φ , vom Grade $< m$ und mit rationalen Koeffizienten (Anwendungen auf $x_1 + \dots + x_p$ und auf $x_1 \dots x_p$). Daraus folgt: Eine notwendige Bedingung für die Reduzibilität von $F(x)$ ist die Existenz einer Funktion von p der n Wurzeln ($p = 1, \dots, n-1$), deren Wert dem Koeffizientenkörper von $F(x)$ angehört (Anwendungen auf Resolventen der Gleichungen vierten und sechsten Grades, auf die Bestimmung einer Wurzel, von der man den Betrag, oder den Realteil, oder das Argument kennt).

U. Morin (Padova).

Wenkov, B.: Über die Reduktion positiver quadratischer Formen. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 37–52 u. dtsch. Zusammenfassung 52 (1940) [Russisch].

Bei der Reduktionstheorie der positiven reellen quadratischen Formen n -ter Ordnung $f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) handelt es sich darum, in dem Koeffizientenraum mit den Koordinaten a_{ij} ($i \leq j$) einen Fundamentalbereich für die Gruppe G_n der unimodularen Substitutionen n -ter Ordnung (d. h. der Substitutionen mit ganzrationalen Koeffizienten und der Determinante ± 1) festzulegen. Während man gewöhnlich nach einem bestimmten Fundamentalbereich fragt, sucht der Verf. einen möglichst allgemeinen. Dabei werden folgende Bezeichnungen gebraucht. Ist neben f eine zweite Form $g = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$ gegeben, so wird gesetzt $(f, g) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + \dots + 2a_{12} b_{12} + \dots$, ferner wird die durch die lineare Transformation S aus f entstehende Form durch fS bezeichnet. Ist dann \mathfrak{P} der den positiven Formen entsprechende Teil des Koeffizientenraumes, so gibt jede fest gewählte positive Form φ und ihre Formenklasse, d. h. die Gesamtheit der Formen $\varphi\Sigma$, wo Σ unimodular ist, Veranlassung zu einer Aufteilung des ganzen Raumteils \mathfrak{P} in lauter unendliche konvexe Pyramiden mit endlicher Kantenanzahl und der Spitze im Koordinatenanfangspunkt. Der Form φ entspricht die Pyramide $V(\varphi)$, der äquivalenten Form $\varphi\Sigma$ die äquivalente Pyramide $V(\varphi\Sigma)$. Jede dieser Pyramiden umfaßt κ Fundamentalbereiche von G_n , wenn κ die Anzahl der Automorphismen von φ bezeichnet. Dabei werden zwei automorphe Substitutionen, die sich nur durch den Faktor -1 unterscheiden, nicht als verschieden gerechnet. Die Einteilung in Pyramiden deckt sich also genau mit der Einteilung in Fundamentalbereiche, wenn $\kappa = 1$. Die Menge der Punkte der Pyramide $V(\varphi)$ ist zugleich eine Menge von Formen f , die in einfacher Weise durch die Bedingungen $(f, \Phi) \leq (f, \Phi\Sigma)$ charakterisiert werden können, wo Φ die zu φ adjungierte Form bezeichnet und Σ alle unimodularen Substitutionen durchläuft. Beim Beweise spielen die von Voronoï eingeführten vollkommenen Formen [J. reine angew. Math. 133, 97–178 (1908)], deren Theorie hier in neuem Lichte erscheint, eine wichtige Rolle. H. Brandt (Halle).

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Nakamura, Masahiro: Partially ordered rings. Tôhoku Math. J. 47, 251–254 (1940).

Ein Ring R mit dem Einselement 1 heißt nach Verf. „teilweise geordnet“ (partially ordered), wenn er außer den sämtlichen, von H. Freudenthal aufgestellten Postulaten als Modul (dies. Zbl. 14, 313) noch den beiden folgenden Postulaten genügt: 1) sind $a \geq 0$, $b \geq 0$ (a, b aus R), so ist $ab \geq 0$; 2) für jedes $a > 0$ (a aus R) existiert eine solche natürliche Zahl n , daß $n(1 \cap a) > a$ ist. Dabei bezeichnet \cap , wie üblich, den Durchschnitt. Verf. entwickelt in dieser Note eine algebraische Theorie des Ringes R . Ein Element e' mit $0 \leq e' \leq 1$ und $e' \cap (1 - e') = 0$ wird ein „unit lattice“ genannt. Ein Element e' ist dann und nur dann ein „unit lattice“, wenn für jedes

$a \geq 1$ stets $ae' \cap 1 = e'$ ist. Ist e' ein "unit lattice", so ist R als direkte Summe von Re' und $R(1 - e')$ darstellbar; hieraus folgt sofort, daß e' stets idempotent ist. Wenn insbesondere R halb-einfach ist, so ist die Gültigkeit des Teilerkettensatzes für die Ideale aus R damit gleichbedeutend, daß die Menge aller "unit lattices" endlich ist.

M. Moriya (Sapporo).

Asano, Keizo, and Tadasu Nakayama: A remark on the arithmetic in a subfield. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 529—531 (1940).

Es sei \mathfrak{D} ein Z.P.I.-Ring (Integritätsbereich mit eindeutiger Primidealzerlegung, Noetherscher „Fünf-Axiome-Ring“); \mathfrak{K} sei der Quotientenkörper von \mathfrak{D} , \mathfrak{f} ein Unterkörper von \mathfrak{K} , \mathfrak{o} der Durchschnitt von \mathfrak{D} und \mathfrak{f} . Dann ist zwar \mathfrak{o} , ebenso wie \mathfrak{D} , im Sinne der Bewertungstheorie stets eine endliche diskrete Hauptordnung; aber es braucht, wie einfache Beispiele zeigen, \mathfrak{o} keineswegs immer ein Z.P.I.-Ring zu sein, da in \mathfrak{o} nichtminimale Primideale auftreten können. Indessen gilt wenigstens der folgende Satz: Ist \mathfrak{K} ein endlicher Normalkörper über \mathfrak{f} , und bedeutet \mathfrak{D}^* den Durchschnitt von \mathfrak{D} mit den über \mathfrak{f} konjugierten Integritätsbereichen, so ist \mathfrak{o} dann und nur dann ein Z.P.I.-Ring, wenn \mathfrak{D}^* einer ist; insbesondere muß \mathfrak{o} immer ein Z.P.I.-Ring sein, wenn \mathfrak{D} mit allen über \mathfrak{f} konjugierten Integritätsbereichen zusammenfällt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$. *Krull*.

Loonstra, F.: Folgen und Reihen in bewerteten Körpern. 1. Mitt. Tl. 1. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 286—297 (1941).

Elementare Bemerkungen über konvergente Folgen, Differentiation von Potenzreihen u. dgl. in bewerteten Körpern. Man könnte fast sagen, die Note sei so geschrieben, als wenn zur Bewertungstheorie bisher nur die Arbeiten von Kürschák [J. reine angew. Math. **142**, 211—253 (1913)] und von Ostrowski [Acta math. **41**, 271—284 (1917)] vorlägen.

Krull (Bonn).

Zahlkörper:

Rédei, L.: Über den geraden Teil der Idealklassengruppen in algebraischen Zahlkörpern. Mat. természett. Értes. **59**, 829—839 u. dtsh. Zusammenfassung 840—841 (1940) [Ungarisch].

Es liege in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper k von endlichem Grade die allgemeinste Idealklasseneinteilung mit der Hauptklasse H vor, e_n ($n \geq 1$) bedeute die Anzahl der durch 2^n teilbaren Invarianten der Klassengruppe, und K_n bezeichne einen durch H induzierten Klassenkörper, der vom Relativgrade 2^n und zyklisch über k ist. Es wird eine Methode entwickelt, nach der man e_n ($n \geq 2$) durch die Aufstellung der ambigen Idealklassen B ($B^2 = H$) und die Konstruktion aller K_{n-1} ermitteln kann. Die Hauptrolle spielt ein aus dem Artinschen Symbol abgeleitetes Symbol $(K_1, C)_n$ (s. unten), das eine Verallgemeinerung des Spezialfalles $a_3 | a_1 a_2$ des vom Verf. eingeführten Symbols $\{a_1, a_2, a_3\}$ ist (vgl. dies. Zbl. **19**, 4). Des näheren enthält die Arbeit folgendes: (I.) Über einem K_n ($n \geq 1$) gibt es einen K_{n+1} dann und nur dann, wenn das Artinsche Symbol $\left(\frac{K_n}{B}\right)$ für alle B gleich 1 ist. (In $\left(\frac{K_n}{B}\right)$ ist für B ein beliebiges Ideal einzusetzen.) Unter (K_1) wird die Abelsche Gruppe vom Typus $(2, 2, \dots, 2)$ der Elemente K_1 und k (= Einheit) verstanden, wobei als Kompositum $K_1 \cdot L_1$ von zwei voneinander und von k verschiedenen Elementen K_1, L_1 der dritte über k quadratische Unterkörper des zusammengesetzten Körpers $K_1 L_1$ erklärt ist. (II.) Für $n \geq 1$ bilden k und die K_1 , über denen es einen K_n gibt, eine Untergruppe $(K_1)_n$ von (K_1) der Ordnung 2^{e_n} . [(I) und (II) sind Verallgemeinerungen der Sätze von Reichardt; dies. Zbl. **7**, 396.] Definition: Ist K_1 ein Element von $(K_1)_n$ ($n \geq 1$) und ist $\left(\frac{K_n}{C}\right) (K_1 \leq K_n, C \text{ eine Idealklasse})$ gegenüber der besonderen Wahl von K_n invariant und von der Ordnung ≤ 2 , so bedeute $(K_1, C)_n$ das Element gleicher Ordnung in der multiplikativen Gruppe der Zahlen 1, -1. (III.) und (IV.) Es gelten $(K_1, C)_n (K_1, C')_n = (K_1, CC')_n$, $(K_1, C)_n (L_1, C)_n = (K_1 \cdot L_1, C)_n (K_1 \neq L_1)$.

(V.) $(K_1, C)_n$ existiert für $n = 1$ unbeschränkt, für $n \geq 2$ dann und nur dann, wenn alle $(L_1, C)_{n-1}$ (L_1 in $(K_1)_{n-1}$) existieren und gleich 1 sind. (VI.) K_1 gehört zu $(K_1)_n$ dann und nur dann, wenn alle $(K_1, B)_{n-1}$, die existieren, gleich 1 sind. Weiter wird in (VII) der kürzeste Weg zur Bestimmung von e_n aus (I) bis (VI) angegeben. In einer späteren Arbeit folgen Anwendungen auf die Ringklassengruppe und Norm der Ringeinheiten in quadratischen Zahlkörpern als Erweiterung von früheren Untersuchungen des Verf. (Die Methode weicht völlig von der bei Inaba ab; vgl. dies. Zbl. 24, 10.) Autoreferat.

Zahlentheorie:

Marcus, O.: Distribution des nombres naturels en progressions géométriques n'ayant aucun terme commun. Applications. C. R. Acad. Sci., Paris 211, 97—99 (1940).

Eine natürliche Zahl, die nicht Potenz einer anderen ist, heißt Basis. Die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren erlaubt eine eindeutige Darstellung $n = b_h^k$, wo b_h die h -te unter den nach Größe geordneten Basiszahlen bezeichnet und stellt somit zwischen n und (h, k) eine eindeutige Beziehung her. Die hiervon gemachten Anwendungen sind nicht tief. Hoheisel (Köln).

Kantz, Georg: Zerfällung einer Zahl in Summanden. Deutsche Math. 5, 476—481 (1941).

Verf. gibt zunächst folgende Rekursionsformeln für $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ r \end{smallmatrix} \right\}_p$, der von ihm eingeführten Bezeichnung der Zahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl s durch r natürliche Summanden $\geq p$. Hierbei sind Darstellungen, die aus einander durch Vertauschung der Summanden hervorgehen, nur einmal gezählt. Es wird

$$\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ r \end{smallmatrix} \right\}_p = \sum_{i=0}^{(s-rp)/r} \left\{ \begin{smallmatrix} s-p-i \\ r-1 \end{smallmatrix} \right\}_p, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ r \end{smallmatrix} \right\}_p = \left\{ \begin{smallmatrix} s+mr \\ r \end{smallmatrix} \right\}_{m+p} \quad (m \text{ natürliche Zahl}).$$

Für $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ r \end{smallmatrix} \right\}_1$ findet er $\sum [(s+2-r-\sum i a_i)/2]$, wobei die a_i ($i = 3, 4, \dots, r$) unabhängig voneinander die Werte 0, 1, 2, ... durchlaufen und für $i > r$ die Größe $a_i = 0$ zu setzen ist. Jedes dieser $(r-2)$ -tupel ist anzusetzen, bei nur endlich vielen fällt der Ausdruck unter der Summe von null verschieden aus. Es muß also dabei erwähnt werden, daß im Gegensatz zum sonstigen Gebrauch die eckige Klammer nur dann das größte Ganze bezeichnet, wenn es positiv ist, sonst null. — Verf. gibt dann noch einen Beweis des bekannten Satzes über den Zusammenhang der Anzahl der Zerfällungen einer natürlichen Zahl s in r verschiedene positive Summanden mit der Anzahl der Zerfällungen in r verschiedene oder gleiche positive Summanden. Die erste Zahl erweist sich gleich der für $s - (r^2 - r)/2$ gebildeten letzten. Beim Beweis treten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte auf. Holzer (Wien).

Buchstab, A. A.: Sur la décomposition des nombres pairs en somme de deux composantes dont chacune est formée d'un nombre borné de facteurs premiers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 29, 544—548 (1940).

Verschärfung der Resultate der in dies. Zbl. 22, 113 besprochenen Arbeit des Verf. Es sei C_k die Menge aller natürlichen Zahlen, welche Produkte von höchstens k Primzahlen sind. Ergebnisse: I. Es gibt unendlich viele Zahlenpaare t, v aus C_4 mit $v - t = 2$. II. Die Anzahl dieser Zahlenpaare unterhalb x ist $< 19,43x(\log x)^{-2}$ für große x (diese obere Abschätzung gilt also um so mehr für die Anzahl der Paare von Primzahlzwillingen unterhalb x). III. Jede hinreichend große, gerade Zahl ist als Summe zweier Zahlen aus C_4 darstellbar. — Ähnliche Ergebnisse für C_5 hat Verf. in der zitierten Arbeit abgeleitet (in II stand damals 28,2 statt 19,43), und zwar im wesentlichen mit derselben Methode, nur werden jetzt die Abschätzungen verschärft. — Die angedeuteten numerischen Rechnungen habe ich nicht nachgeprüft. Auf S. 546, Z. 13 lies im Exponenten 32ε statt 32. Auf S. 547, Formel (2) hinter dem Integralzeichen lies λ statt Λ . — Wegen III vgl. auch Tartakovski, dies. Zbl. 22, 113. Jarník (Prag).

Mardjanichvili, C.: Sur un problème additif de la théorie des nombres. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 193—213 u. franz. Zusammenfassung 213—214 (1940) [Russisch].

Es seien n, s natürliche Zahlen, $\varepsilon > 0$. Von n positiven Zahlen h_1, \dots, h_n sage man, daß sie die Bedingung (a) erfüllen, wenn für jedes System von Zahlen h'_k mit $h_k - \varepsilon \leq h'_k \leq h_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) die Gleichungen $\xi_1^k + \dots + \xi_s^k = h'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) in positiven ξ_i ($i = 1, \dots, s$) lösbar sind. Dann gilt Satz I: Ist $s > 5n(n+1)(n+2)\log n$, sind N_1, \dots, N_n natürliche Zahlen und erfüllen die durch die Gleichungen $N_k = h_k N_n^{k/n}$ ($k = 1, \dots, n$) definierten Zahlen h_k die Bedingung (a), so ist

$$I(N_1, \dots, N_n; s) = B(h_1, \dots, h_{n-1}; s) N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\log N)^{-s} \cdot \mathfrak{S}(N_1, \dots, N_n; s) \\ + \theta C_3 N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\log N)^{-s-\omega}$$

bei beliebigem $\omega > 0$; dabei ist $I(N_1, \dots, N_n; s)$ die Anzahl der Systeme von Primzahlen p_1, \dots, p_s mit (1) $N_k = p_1^k + \dots + p_s^k$ ($k = 1, \dots, n$); weiter ist $|\theta| < 1$, $C_1 < B(h_1, \dots, h_{n-1}; s) < C_2$, wobei $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ nur von n, s, ε abhängen; \mathfrak{S} ist zum Problem gehörige singuläre Reihe. — Ist p eine Primzahl, so seien $\varrho_1 = \varrho_1(p), \dots, \varrho_n = \varrho_n(p)$ die n kleinsten natürlichen Zahlen, die nicht durch p teilbar sind; $\theta = \theta(p)$ sei die größte ganze Zahl, für welche p^θ in $\prod_{1 \leq i < k \leq n} (\varrho_k - \varrho_i)$ auf-

geht. Es seien π_1, \dots, π_m alle Primzahlen $\leq n$. Satz II. Genügen die ganzen Zahlen M_1, \dots, M_n für $i = 1, \dots, m$ den Bedingungen

$$\begin{vmatrix} M_n, \varrho_n^{n-1}(\pi_i), \dots, \varrho_1^{n-1}(\pi_i) \\ \dots \\ M_1, \varrho_n^0(\pi_i), \dots, \varrho_1^0(\pi_i) \end{vmatrix} \equiv \dots \equiv \begin{vmatrix} \varrho_n^{n-1}(\pi_i), \varrho_n^{n-1}(\pi_i), \dots, M_n \\ \dots \\ \varrho_n^0(\pi_i), \varrho_n^0(\pi_i), \dots, M_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}},$$

so gibt es ein $s_0 = s_0(M_1, \dots, M_n)$ mit $s_0 < C_4$, $\mathfrak{S}(M_1, \dots, M_n; s_0) > C_5 > 0$, wo C_4, C_5 nur von n abhängen. — Durch Kombination dieser Sätze ergeben sich natürlich Resultate über die Lösbarkeit von (1). — Einige Stellen der Arbeit sind wohl nicht ganz korrekt; bereits in der Formulierung des Satzes I wird die Abhängigkeit von ε nicht betont, obwohl sie aus dem Beweis (vgl. S. 202) deutlich hervorgeht (je kleiner ε , desto größer muß N sein). — Ein ähnliches Problem, wobei aber die p_i in (1) beliebige ganze, nichtnegative Zahlen (nicht notwendig Primzahlen) bedeuteten, hat Verf. in einer älteren Arbeit behandelt (Sur la représentation simultanée de n nombres par des sommes des puissances complètes [Bull. Acad. Sci. URSS 1937, 609—631]). Jarník.

Linnik, U. V.: The large sieve. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 292—294 (1941).

Es sei X eine natürliche Zahl; jeder Primzahl p mit (1) $p \leq \sqrt{X}$ sei eine Zahl $f(p)$ mit $0 < f(p) < p$ zugeordnet; es sei τ das Minimum von $f(p)/p$ für alle Primzahlen (1). Dann gilt: I. Sind Z verschiedene natürliche Zahlen (2) M_1, \dots, M_Z ($M_j \leq X$) gegeben, so genügt die Anzahl Y derjenigen Primzahlen p mit (1), für welche die Zahlen (2) zu höchstens $p - f(p)$ verschiedenen Restklassen modulo p gehören, der Ungleichung (3) $YZ \leq 20\pi X\tau^{-2}$. — II. Es seien Y verschiedene Primzahlen (4) p_1, \dots, p_Y mit (1) gegeben; jeder Primzahl p_i aus (4) ordne man $f(p_i)$ verschiedene Restklassen modulo p_i zu; man lasse von den Zahlen (5) $1, 2, \dots, X$ diejenigen weg, die nach mindestens einer der Primzahlen (4) einer der genannten Restklassen angehören; ist Z die Anzahl der übrigbleibenden Zahlen aus (5), so gilt wieder (3). — II ist eine unmittelbare Folge von I und stellt ein Siebverfahren dar, welches dann von Interesse ist, wenn die Anzahl $f(p)$ der unterdrückten Restklassen für großes p groß ist. — Auf S. 293, Z. 5 v. u. fehlt der Faktor p/s . Jarník (Prag).

Vinogradov, I.: On the estimations of some simplest trigonometrical sums involving prime numbers. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 371—396 u. engl. Zusammenfassung 396—398 [Russisch].

Im Folgenden ist stets $0 \leq a < q$, $(a, q) = 1$; $n > 0$ ganz, α reell, $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$;

mit $c(x, y, z)$ seien positive Zahlen bezeichnet, die nur von x, y, z abhängen; p bedeutet stets Primzahlen, $\exp x = e^x$. Stets ist $N > 2$, $r = \log N$. Resultate: I. (Kleine q , Brunsches Siebverfahren wird angewandt.) Ist $0 < \eta < \varepsilon \leq \frac{1}{3}$, $N \cdot \exp(-r^{1-2\varepsilon}) \leq A \leq N$,

$q < \exp(r^\varepsilon)$, so ist $\left| \sum_{N-A < p \leq N} \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} p^n\right) \right| < c_1(\varepsilon, \eta) A r^{3\varepsilon-1} q^{\eta-\frac{1}{2}}$. — II. (Große q .)

Sind ε, η, h positiv und < 1 , $\exp(r^\varepsilon) < q$, $N^{\frac{1}{2}+h} q^{\frac{1}{2}} \leq A \leq N$, so ist

$$\left| \sum_{N-A < p \leq N} \exp\left(2\pi i \frac{a}{q} p^n\right) \right| < c_2(h, \varepsilon, \eta) A q^{\eta-\frac{1}{2}}.$$

Für $n = 1$ wird bewiesen: Ist $q \leq N$, $1 \leq A \leq N$, $0 < h \leq \frac{1}{2}$, k ganz > 0 , so ist

$$\left| \sum_{N-A < p \leq N} \exp(2\pi i \alpha k p) \right| < c_3(h) A \left(\frac{k N^{\frac{2+h}{3}}}{A} + \frac{Nq}{A^2} + \frac{k}{q} + \frac{k^4}{q^2} \right)^{\frac{1}{2}} r^{\delta + \log r / \log(1+h)}.$$

Daraus folgt unschwer ein Satz über die Gleichverteilung der Folge $\{\alpha p\}$: Sind ε, h positiv und $\leq \frac{1}{6}$, $N \geq c_4(\varepsilon, h)$, $q \leq N$, $1 \leq A \leq N$, $0 < \delta \leq 1$, so ist

$$|T_1 - \delta T| < c_5(\varepsilon, h) A (N^{\frac{1}{2}+h} A^{-1} + N^{1+h} q^{1-h} A^{-2} + q^{h-1})^{\frac{1}{2}} \exp(r^\varepsilon).$$

Dabei ist T die Anzahl aller p mit $N - A < p \leq N$, T_1 die Anzahl derjenigen unter ihnen, für welche $\alpha p - [\alpha p] \leq \delta$ ist. Setzt man hier $\alpha = Q^{-1}$ ($Q > 1$), so bekommt man einen Satz über die Verteilung der Reste der Primzahlen p modulo Q . Es folgt eine Berichtigung zu der im Zbl. 23, 206 besprochenen Arbeit des Verf. — Wegen einer Anzeige der hier dargestellten Ergebnisse vgl. dies. Zbl. 23, 206. — Auf S. 372 lies $\Omega(d) \leq m$ statt $<$ (die letzten benutzten $\mu(d)$ müssen positiv sein). Im Lemma 2 fehlt die Voraussetzung $(a, q) = 1$. S. 374, Z. 2: lies $\psi(y)$ statt $\varphi(y)$. S. 375, Z. 6 im Exponenten lies $2\pi i \frac{a}{q} p^n$. S. 381, Z. 19: hier ist $r = 1, 2$ und nicht $r = \log N$, wie sonst. S. 384, Z. 8 v. u. links im Exponenten lies $1/3\lambda$ statt $1 - 1/3\lambda$. S. 385, Z. 14—17: es kommt eventuell noch eine unvollständige Summe hinzu, die aber weiter nicht stört. S. 387, Z. 2 v. u. lies S_0 statt S_1 . S. 388, Z. 14: lies $2\pi i \alpha k d m$ im Exponenten. S. 391, Z. 13 Ende: lies q^2 statt p^2 . S. 393, Z. 4 lies $\theta k/q^2$ statt θ/q^2 . Z. 7 lies cq statt ch ; Z. 6 v. u. lies δT statt σT . — Ref. scheint es, daß die Darstellung von T'_3 auf S. 384, Z. 12 und S. 389, Z. 6 v. u. nicht ganz korrekt ist [es soll $(u_0, v) = 1$ sein, so daß der Wertevorrat von v nicht nur von dem Produkt $u = mu_0$, sondern auch von u_0 abhängt]. Eine einwandfreie Behandlung eines ganz analogen Falles findet man in der nachstehend besprochenen Arbeit des Verf., insbesondere S. 32, untere Hälfte. . Jarník.

Vinogradov, I.: Distribution of primes of an arithmetical progression to a given modulus. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 27—36 u. engl. Zusammenfassung 36 (1940) [Russisch].

I. Es sei $(a, q) = (L, Q) = (Q, q) = 1$, $0 < q \leq N$, $1 \leq A \leq N$, $\eta > 0$. Dann ist (p läuft über Primzahlen)

$$\left| \sum_{\substack{N-A < p \leq N \\ p \equiv L \pmod{Q}}} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} \right| < c_1(\eta) R, \quad \text{wo} \quad R = \frac{A}{Q} N^\eta \left(\frac{1}{q} + \frac{N^{2/3} Q}{A} + \frac{N Q^2 q}{A^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt: II. Es sei $0 < q \leq N$, $Q \leq A \leq N$, $(L, Q) = (q, Q) = 1$, $0 < \sigma \leq 1$, $\eta > 0$. Es sei T die Anzahl der Primzahlen p mit $p \equiv L \pmod{Q}$, $N - A < p \leq N$; T_1 sei die Anzahl derjenigen unter ihnen, deren kleinster nichtnegativer Rest modulo q kleiner als σq ist. Dann ist $|T_1 - \sigma T| < c_2(\eta) R$. — Für $Q = 1$ hat Verf. bereits früher Resultate abgeleitet, die für kleine q schärfer sind als I, II (siehe vorstehendes Referat). — S. 30, Z. 9 lies $\min(u_2, \dots)$ statt $\min(u_1, \dots)$. S. 30: Der Übergang von Z. 7 v. u. zu Z. 6 v. u. ist nicht richtig (da N nicht nach oben eingeschränkt ist, darf man Glieder mit N^2 auf Z. 7 v. u. keineswegs vernachlässigen). Bei Anwendung auf

den Beweis von I schadet das nicht, da I für allzu große N (nämlich für $QN^{2/3} \geq A$) trivial ist. S. 31, Z. 3 lies p statt q . S. 35: von 6. Zeile an lies σ statt δ . *Jarník*.

Vinogradoff, I. M.: Two theorems relating to the theory of distribution of prime numbers. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30**, 287—288 (1941).

Es seien $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, $k \geq 12$ Konstanten, ε hinreichend klein, p läuft über Primzahlen. Folgende Sätze werden ohne Beweis angekündigt: I. Ist $A > 0$, $4 \leq \frac{1}{2}N \leq N_1 < N_2 \leq N$, hat $f(z)$ für $\frac{1}{2}N \leq z \leq N$ stetige dritte Ableitung und ist daselbst $A^{-1} \ll |f''(z)| \ll A^{-1}$, $A^{-1} \ll |zf'''(z) + 2f''(z)| \ll A^{-1}$, so ist

$$\sum_{N_1 < p \leq N_2} \exp(2\pi i f(p)) = O(N^{1+\eta}(NA^{-1} + AN^{-2})^{\frac{1}{2}}).$$

II. Ist $4 \leq \frac{1}{2}N \leq N_1 < N_2 \leq N$, $n = [2k + 2]$, hat $f(z)$ für $\frac{1}{2}N \leq z \leq N$ stetige $(n + 1)$ -te Ableitung und ist daselbst

$$N^{k-s-0,01} \ll |f^{(s)}(z)| \ll N^{k-s+\varepsilon}, N^{k-s-0,01} \ll |sf^{(s)}(z) + zf^{(s+1)}(z)| \ll N^{k-s+\varepsilon}$$

für $s = [k + 2], [k + 2] + 1, \dots, n$, so ist $\sum_{N_1 < p \leq N_2} \exp(2\pi i f(p)) = O(N^{1-0,133\varepsilon})$, $q^{-1} = n^3 \log 4n$.

Zu I wird noch ein entsprechender Satz über die Verteilung der Folge $f(p)$ modulo 1 angegeben. *Jarník* (Prag).

Segal, B.: On integers of standard form of a definite type. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **1939**, 519—536 u. engl. Zusammenfassung 537—538 [Russisch].

Im Folgenden seien p_1, \dots, p_l vorgegebene, untereinander verschiedene Primzahlen, $\varepsilon > \varepsilon_0 > 0$, $N > e^e$, $\Delta = \exp(-(\log \log N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$, $R = 2 \cdot ((l-1)! \log p_1 \dots \log p_l)^{-1}$. Es sei $I(N)$ die Anzahl aller Systeme natürlicher Zahlen a_1, \dots, a_l mit

$$(1) \quad e^{-\Delta} \leq N p_1^{-a_1} \dots p_l^{-a_l} \leq e^{\Delta};$$

es sei $J(N)$ die Anzahl aller Systeme von Primzahlen a_1, \dots, a_l mit (1). Dann ist für $l \geq 3$

$$(2) \quad I(N) = R (\log N)^{l-1} \Delta (1 + O(\exp(-\log \log N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon_0})),$$

$$(3) \quad J(N) = \frac{R (\log N)^{l-1} \Delta}{(\log \log N)^l} \left(1 + O\left(\frac{\log \log \log N}{\log \log N}\right) \right).$$

(2) löst also für $l \geq 3$ das Problem der angenäherten Darstellung von N durch Zahlen der Gestalt $p_1^{a_1} \dots p_l^{a_l}$; ein etwas schwächeres Ergebnis für $l = 2$ (welches sich aber, wie Verf. behauptet, mit der gegenwärtigen Methode zu (2) verschärfen läßt) hat Verf. bereits 1933 bewiesen (C. R. Acad. Sci. URSS A. **1933**, 39—44). Zu (3) gibt Verf. kein Analogon für $l = 2$; er beweist aber folgenden gemischten Satz: Es seien p_1, p_2 zwei verschiedene Primzahlen; es sei $K(N)$ die Anzahl aller Systeme x, y ($y > 0$ ganz, x Primzahl) mit $1 \leq N p_1^{-x} p_2^{-y} \leq e^{\Delta}$. Dann ist

$$K(N) = \frac{\Delta}{\log p_2} \int_2^{\log N / \log p_1} \frac{du}{\log u} + O(\Delta^2 \cdot \log N).$$

Zum Beweis werden Sätze von Vinogradow (dies. Zbl. **24**, 293) über Exponentialsummen mit Primzahlen sowie ein Satz von Gelfond (dies. Zbl. **24**, 251) über das Transzendenzmaß von $\log p_1 / \log p_2$ herangezogen. Auf S. 532 wird Lemma 1 (ein Satz von Vinogradow) inkorrekt angewandt; es ist dort $z \log p_2 = r_2/q_2 + \theta_3 k/q_2^2$, $(r_2, q_2) = 1$, $k > 0$ ganz, $|\theta_3| \leq 1$; Lemma 1 wäre dagegen anwendbar, wenn $z \log p_2 = k r_2/q_2 + \theta_3 k/q_2^2$ wäre (mit denselben k, r_2, q_2 und mit $|\theta_3| \leq 1$). Es ist freilich durchaus möglich, daß die entsprechende Modifikation von Lemma 1 richtig ist. *Jarník* (Prag).

Segal, B.: Representation of complex numbers by sums of powers of polynomials. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **1939**, 303—317 u. engl. Zusammenfassung 318 [Russisch].

Es sei $\varphi(x) = \gamma x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \dots + \gamma_m$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, $\gamma > 0$, a, b reell, $ma > 1$, $b \neq 0$. Es handelt sich um die Annäherung einer beliebigen komplexen Zahl $N = N_1 + iN_2$ durch Ausdrücke $\sum_{\lambda=1}^r (\varphi(x_\lambda))^{a+b\lambda}$ mit ganzen $x_\lambda > 0$.

Es ergibt sich: Man setze $n = [ma] + 2$, $a' = n - ma - 1$ ($0 < a' \leq 1$), $\varrho_n = 2^{-n}$ für $n < 14$, $\varrho_n = (2(n+1)^3 \log 2(n+1))^{-1}$ für $n \geq 14$, $r_0 = [2n\varrho_n^{-1}] + 1 = 2n\varrho_n^{-1} + \varepsilon'$ ($0 < \varepsilon' \leq 1$), $X = \gamma^{-1/m} |N|^{1/ma}$, $\alpha = \frac{a'\varepsilon'}{r_0}$, $r \geq r_0$, r ganz. Es sei I_N die Anzahl der Darstellungen von $N = N_1 + iN_2$ in der Gestalt $N = h_1 + ih_2 + \sum_{\lambda=1}^r (\varphi(x_\lambda))^{a+b_i}$ mit $-X^{-\alpha} \leq h_i \leq X^{-\alpha}$ ($i = 1, 2$), $0 < x_\lambda < X$, x_λ ganz ($1 \leq \lambda \leq n$). Dann ist $I_N = L X^{r-2ma-2\alpha} (1 + O(x^{-\alpha}))$, wo L größer als eine nur von a, b, m, γ, r abhängige positive Zahl ist; also $I_N > 0$ für große $|N|$. — Die Zahl ϱ_n hängt mit den Sätzen über die Abschätzung von Exponentialsummen $\sum_{A \leq x \leq B} \exp(2\pi i f(x))$ zusammen; jede hin-

reichend große Verschärfung dieser Abschätzungen würde eine Vergrößerung von ϱ_n und eine Verkleinerung von r_0 ermöglichen. — Verf. hat bereits früher den Spezialfall $\varphi(x) = x$ (im wesentlichen mit derselben Methode) behandelt (dies. Zbl. 21, 208, vgl. auch dies. Zbl. 20, 7). — Auf S. 304, Z. 2 v. u. lies $r_0 = n2^{n+1} + 1$. Jarník.

Koksma, J. F.: Über die Diskrepanz (mod 1) und die ganzzahligen Lösungen gewisser Ungleichungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 75—80 (1941).

Es sei (1) $f(1), f(2), \dots, f(N)$ ein System von N (nicht notwendig verschiedenen) reellen Zahlen, (2) $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1$; es sei $A(\alpha, \beta)$ die Anzahl der ganzen x ($1 \leq x \leq N$) mit (3) $\alpha \leq f(x) < \beta \pmod{1}$, und man setze (4) $R(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha)N$; die obere Grenze von $|R(\alpha, \beta)|N^{-1}$ für alle α, β mit (2) heißt die Diskrepanz D des Systems (1) modulo 1. Es sei D^* die Diskrepanz des Systems (5) $f(x) - f(y)$ ($x, y = 1, 2, \dots, N$); es sind Beziehungen zwischen D, D^* bekannt. Hier wird folgender metrischer Satz bewiesen: Es sei $f(1), f(2), \dots$ eine unendliche Folge reeller Zahlen; es sei $D^*(N)$ die Diskrepanz des Systems (5) für $N = 1, 2, \dots$. Es sei $\Phi(N) \rightarrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$, $D^*(N)\Phi(N) \leq \frac{1}{2}$ für große N . Es sei $A_\alpha(N)$ die Anzahl der ganzen x mit $\alpha - D^*(N)\Phi(N) \leq f(x) < \alpha + D^*(N)\Phi(N) \pmod{1}$, $1 \leq x \leq N$. Ist dann (6) $N_1 < N_2 < \dots$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen, so gibt es zu jedem α , mit Ausnahme einer Menge der Zahlen α vom Maß Null, unendlichviele N aus (6) mit $ND^*(N)\Phi(N) < A_\alpha(N) < 3ND^*(N)\Phi(N)$. Der Beweis wird auf Grund der Identität $\int_0^1 R^2(\alpha - t, \alpha + t) d\alpha = \int_0^{2t} R^*(-\alpha, \alpha) d\alpha$ ($0 \leq t \leq \frac{1}{4}$) geführt; dabei ist R

durch (4) definiert und R^* steht in derselben Beziehung zum System (5) wie R zu (1). — Die Formel (14) ist richtig für $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$ (was allein zur Anwendung gelangt), nicht aber immer für $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ (für $t = \frac{1}{2}$ ist z. B. die linke Seite = 1). — Die Bedingung $D^*\Phi \leq \frac{1}{4}$ wurde vom Ref. hinzugefügt, damit auf S. 80, Z. 5 v. u. $t \leq \frac{1}{4}$ herauskomme. Jarník (Prag).

Koksma, J. F., und B. Meulenbeld: Über die Approximation einer homogenen Linearform an die Null. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 62—74 (1941).

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reelle Zahlen; wird $\varrho_n = 1$ gesetzt, so hat bekanntlich die Ungleichung (1) $|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - y| < \frac{1}{\varrho_n x^n}$ ($x = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) > 0$) unendlichviele Lösungen in ganzen Zahlen x_1, \dots, x_n, y . Es wird nun gezeigt, daß man hier $\varrho_n = 1$ durch $\varrho_n = (1 + 1/n)^n$ (Minkowskische Methode), ja sogar durch (2) $\varrho_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n-1}{n+1}\right)^{n-3}$ (Blichfeldtsche Methode) ersetzen darf. — Das letztgenannte Ergebnis folgt aus dem folgenden Hauptsatz: Zu jedem $t > 2$ gibt es ganze x_1, \dots, x_n, y mit (1) und mit $x \leq 2t^n \varrho_n^{-\frac{1}{n}}$, $|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - y| \leq 2/t$; dabei ist ϱ_n durch (2) erklärt. — Entsprechende Resultate für das Problem der simultanen Approximationen $|\alpha_i Y - X_i| \leq \frac{1}{r_n Y^{1/n}}$ ($Y > 0$, $i = 1, \dots, n$) verdankt man Minkowski (Geometrie der Zahlen, 1910) und Blichfeldt [Trans. Amer. Math. Soc. 15, 227—235 (1914)]. Jarník (Prag).

Koksma, J. F., und B. Meulenbeld: Simultane Approximationen in imaginären quadratischen Zahlkörpern. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 310—323 (1941).

Sind $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ n linear unabhängige reelle Zahlen, so gibt es nach Minkowski unendlich viele ganze Zahlen p_1, \dots, p_n, q ($q \geq 1$), so daß gleichzeitig

$$\left| \theta_\nu - \frac{p_\nu}{q} \right| < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) q^{1 + \frac{1}{n}}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses Ergebnis wurde durch eine neue

Idee von Blichfeldt verbessert. Man kann im Nenner rechts noch mit dem Faktor $\left\{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+3}\right\}^{\frac{1}{n}}$ multiplizieren. Betrachtet man Approximationen komplexer Zahlen durch Zahlen aus dem imaginär-quadratischen Körper $K(i\sqrt{m})$ (m quadratfrei), so erhält man nach der Minkowskischen Methode

$$\left| \theta_\nu - \frac{P_\nu}{Q} \right| < \frac{2n}{(n+1)\sqrt{\pi}} \sqrt[2n]{\frac{4(2n+1)m^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)\pi\lambda^{n+1}}} \cdot \frac{1}{|Q|^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

Dabei ist $\lambda = 1$ für $m \equiv 3 \pmod{4}$, $\lambda = 2$ für $m \equiv 1 \pmod{4}$. — In dieser Arbeit wird die Blichfeldtsche Methode ins Komplexe übertragen. Dadurch erhält man bessere Abschätzungen, da man den Nenner rechts noch mit dem Faktor

$$\sqrt[2n]{1 + \frac{(n-1)^{2n+2}}{(n+1)^{2n+1}n} + \frac{2^{2n+3}n^{2n+1}(2n+1)}{(n+1)^{2n+1}} \sum_{\mu=2n+3}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{n-1}{2n}\right)^\mu}$$

multiplizieren kann. Man bekommt damit für $n > 1$ die besten, heute bekannten Approximationen, für $n = 1$ aber haben andere Methoden schon zu besseren Ergebnissen geführt.

Hofreiter (Wien).

Gelfond, A.: On the simultaneous approximations of algebraic numbers by rational fractions. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 99—104 u. engl. Zusammenfassung 104 (1941) [Russisch].

Es sei α eine ganze algebraische Zahl n -ten Grades. Folgender Zusammenhang zwischen den angenäherten Lösungen der Gleichung $x_0 + x_1\alpha + \dots + x_{n-1}\alpha^{n-1} = 0$ einerseits und der Gleichungen $y_0\alpha^k - y_k = 0$ ($k = 1, \dots, n-1$) andererseits (in ganzen rationalen x_i, y_i) wird bewiesen: Es sei eine Folge (1) ξ_1, ξ_2, \dots gegeben,

wo I. $\xi_s = \sum_{k=0}^{n-1} A_{k,s}\alpha^k$, $A_{k,s}$ ganz rational, $A_s = \max_{0 \leq k \leq n-1} |A_{k,s}| \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$, $(A_{0,s}, \dots, A_{n-1,s}) = 1$. Weiter sei II. $A_s^{n-1} |\xi_s| < \lambda_0$ ($s = 1, 2, \dots$), wo λ_0 von s nicht abhängt. Man ordne der Folge (1) die Folge $\bar{\xi}_s = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k,s}\alpha^k$ ($s = 1, 2, \dots$; $C_{k,s}$

ganz rational, $(C_{0,s}, \dots, C_{n-1,s}) = 1$) durch die Bedingung zu, daß $\xi_s \bar{\xi}_s \neq 0$ eine ganze rationale Zahl ist (dadurch ist $\bar{\xi}_s$ bis auf den Faktor ± 1 bestimmt). Dann gilt: III. Es ist $|C_{n-1,s}| \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$, und es gibt ganz rationale $q_{1,s}, \dots, q_{n-1,s}$ mit

$(C_{n-1,s}, q_{1,s}, \dots, q_{n-1,s}) = 1$, $|C_{n-1,s}|^{\frac{1}{n-1}} |C_{n-1,s}\alpha^k - q_{k,s}| < \lambda_1$ ($k = 1, \dots, n-1$), wo λ_1 nicht von s abhängt. — Umgekehrt: sind die $C_{n-1,s}, q_{k,s}$ mit III gegeben, so gibt es eine Folge ξ_1, ξ_2, \dots mit I, II, so daß die der Zahl ξ_s zugeordnete Zahl $\bar{\xi}_s$ eben den vorgegebenen letzten Koeffizienten $C_{n-1,s}$ besitzt. — Übrigens ist $|C_{n-1,s}|$ für $s \rightarrow \infty$ genau von derselben Größenordnung wie A_s^{n-1} . — Wichtigere Druckfehler auf S. 103: Auf Z. 4 zitiere man (7) statt (23); in (33) fehlt vor der letzten Summe das Zeichen +; in (34) und eine Zeile später lies $C_{p-1,s}$ statt C_s ; am Anfang der Formel (35)

lies $\left| \sum_{k=0}^{p-1} D_{k,s}\alpha^k \right|$ statt $|D_{k,s}\alpha^k|$.

Jarník (Prag).

Heinhold, Josef: Zur Geometrie der Zahlen. Math. Z. 47, 199—214 (1941).

Es sei $f(x, y)$ eine Distanzfunktion im Sinne von Minkowski. Es soll bei gegebenem $f(x, y)$ die untere Grenze $\varphi(f)$ aller C^2 bestimmt werden, die die Eigenschaft haben, daß zu beliebigen reellen Zahlen x, y stets ganze rationale Zahlen X, Y existieren, so daß $f(X + x, Y + y) \leq C^2$. Geometrisch heißt dies, es sollen im Bereich $f(x, y) \leq C^2$ und in den durch beliebige Translation entstehenden Bereichen stets Gitterpunkte im Innern oder auf dem Rande liegen. Es gibt jedenfalls keine nur vom Inhalt I des Bereiches abhängige obere Schranke für φ , wie man an Beispielen zeigen kann. Zu jedem Bereich $f(x, y) \leq C^2$ gibt es einen dazu äquivalenten Bereich $\bar{f}(x, y) \leq C^2$, dem sich nach passender Wahl von C^2 ein aus Punkten A, B, C und deren Spiegelpunkten bezüglich $O(0, 0)$ gebildetes Sechseck mit diesen Punkten als Eckpunkten einbeschreiben läßt. Der gemeinsame Wert $\bar{f}(A) = \bar{f}(B) = \bar{f}(C)$ werde mit $k(u, v)$ bezeichnet. Die Koordinaten von A, B, C sind: $A(x_1 = \frac{1}{4} + u, y_1 = \frac{1}{4} + v)$, $B(x_2 = \frac{3}{4} - u, y_2 = -\frac{1}{4} - v)$, $C(x_3 = \frac{1}{4} + u, y_3 = -\frac{3}{4} + v)$, wobei u, v den Ungleichungen $0 < v \leq \frac{1}{4}$, $0 \leq u \leq v$ genügen. Es ist $\varphi(f) = k(u, v)$. Zu den Distanzfunktionen gehören insbesondere die Funktionen $f(x, y) = (|\alpha x + \beta y|^p + |\gamma x + \delta y|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $p \geq 1$, für die $\varphi(f)$ berechnet wird. Die Beweise werden mit zahlengeometrischen Überlegungen geführt.

Hofreiter (Wien).

Bullig, G.: Zur Kettenbruchtheorie im n -Dimensionalen (Z 3). Math. Ann. 118, 1—31 (1941).

Die in Z 1 (dies. Zbl. 23, 112) für $n = 3$ behandelte Theorie wird auf beliebiges n übertragen. Im n -dimensionalen Raume sei eine Menge M von Punkten $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben: I. M liegt ganz im Oktanten (1) $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$; II. M hat keinen Häufungspunkt; III. zu jedem c und jedem i ($1 \leq i \leq n$) gibt es in M höchstens einen Punkt mit $x_i = c$; IV. zu jedem i ($1 \leq i \leq n$) und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es in M einen Punkt mit $x_1 < \varepsilon, \dots, x_{i-1} < \varepsilon, x_{i+1} < \varepsilon, \dots, x_n < \varepsilon$. Man betrachte Quader P : (2) $0 < x_i < c_i$ ($1 \leq i \leq n$); die k -te Seitenfläche von P ist durch $x_k = c_k, x_i < c_i$ ($i \neq k$) definiert [man betrachtet weiter nur die im Oktanten (1) liegenden Punkte]. Ein solcher Quader heißt extrem n -ter Art (kurz n -Quader), wenn er keinen Punkt von M enthält, wenn aber auf jeder $((n-1)$ -dimensionalen) Seitenfläche ein Punkt von M liegt; es sei p_k der auf der k -ten Seitenfläche liegende Punkt von M . Es sei ein l ($1 \leq l \leq n$) gegeben; man komprimiere P in der Richtung der x_l -Achse, bis die abgeschlossene l -te Seitenfläche zuerst auf einen Punkt p_f mit $f \neq l$ stößt. Den so erhaltenen Quader dilatiere man in der Richtung der x_f -Achse, bis man zuerst auf einen Punkt von M stößt; der so erhaltene Quader Q ist wieder ein n -Quader, und man schreibt $Q = \Omega_{lf}(P)$ (f ist durch P, l bestimmt). Die Operation Ω_{lf} wird nun untersucht, indem man ähnlich wie in Z 1 die t -Intervalle I^t und t -Ecken E^t für $0 \leq t \leq n-1$ einführt und untersucht. Insbesondere ist jede 0-Ecke die Ecke (c_1, \dots, c_n) eines n -Quaders (2) und umgekehrt; jede 1-Ecke besteht aus zwei 1-Intervallen, die zu zwei verschiedenen Koordinatenachsen parallel sind, und wird von zwei 0-Ecken berandet. Die Beziehung $Q = \Omega_{lf}(P)$ ($P: 0 < x_i < c_i$; $Q: 0 < x_i < d_i$) besteht dann und nur dann, wenn die Punkte $P_0 = (c_1, \dots, c_n)$, $Q_0 = (d_1, \dots, d_n)$ eine 1-Ecke $E^1 = I_l^1 + I_f^1$ beranden, wo I_l^1 (bzw. I_f^1) zur x_l -Achse (bzw. zur x_f -Achse) parallel ist und P_0 (bzw. Q_0) zu einem Endpunkt hat. Die Diskussion der kombinatorischen Eigenschaften der E^t (insbesondere der E^1) führt also zu Resultaten über die Operation Ω , welche Verallgemeinerungen derjenigen von Z 1 sind.

Jarník (Prag).

Gruppentheorie.

Kuntzmann, J.: Contribution à l'étude des systèmes multiformes. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, IV. s. 3, 155—193 (1939).

Der Begriff des multiformen Systems ist die denkbar weiteste Verallgemeinerung

des Gruppenbegriffs: Jedem Paar von Elementen (a, b) wird eine Teilmenge des Systems zugeordnet, die man das Produkt nennen kann. Sind alle diese Teilmengen nicht leer, und läßt sich auch die Division auf wenigstens eine Weise ausführen, so spricht Verf. von einer Multigruppe. Gibt es eine einzige Einheit, so heißt das System eine Hypergruppe. So kann man z. B. in Erweiterung des Begriffs der Faktorgruppe von einer Quotienten-Multigruppe einer nichtinvarianten Untergruppe reden. — Um überhaupt Sätze aussprechen zu können, ist eine Fülle von Zwischenstufen und Begriffsbildungen notwendig. Besondere Aufmerksamkeit widmet Verf. den Klasseneinteilungen mit ihren gemeinsamen Teilern, Vereinigungen, Zusammensetzungen usw. Weiter ist der Begriff der Homomorphie in mannigfacher Weise verallgemeinert. *Keller.*

Boruvka, O.: Über Ketten von Faktoroiden. Math. Ann. 118, 41—64 (1941).

Untersucht werden Zerlegungen einer Menge in Komplexe und Ketten von solchen Zerlegungen mit dem Ziel, Mengen zu betrachten, bei denen für die Elemente eine Multiplikation definiert ist, die zwar unbeschränkt ausführbar und eindeutig ist, aber weder assoziativ noch umkehrbar zu sein braucht. Unter den Zerlegungen solcher multiplikativen Systeme heben sich diejenigen heraus, bei denen die Komplexe der Zerlegung zusammen selbst wieder als multiplikatives System aufgefaßt werden können in Analogie zur Zerlegung einer Gruppe nach einem Normalteiler. Der Faktorgruppe entspricht hier das Faktoroid. Es werden Ketten von solchen ausgezeichneten Zerlegungen betrachtet, wobei die bekannten Gruppensätze über Normalketten eine gewisse Übertragung gestatten. Verf. benutzt für die multiplikativen Systeme nach dem Vorbild von B. A. Hausmann und Oystein Ore [Amer. J. Math. 59, 983—1004 (1937); dies. Zbl. 17, 391] den Ausdruck Gruppoid, der vor 15 Jahren von dem Ref. für einen ganz andern Begriff eingeführt worden ist [Math. Ann. 96, 360—366 (1926)]. Da dieser Begriff für die Zahlentheorie der hyperkomplexen Systeme unentbehrlich und auch sonst nützlich ist, hat sich die vorgeschlagene Bezeichnung im In- und Ausland eingebürgert und unter anderm auch Eingang in die Neuausgabe des ersten Teils der mathematischen Enzyklopädie gefunden. Falls der Verf. für die multiplikativen Systeme einen besonderen Ausdruck für notwendig hält, muß daher zur Vermeidung von Begriffsverwirrungen von ihm erwartet werden, daß er die Benennung ändert, unabhängig davon, wie sich der ohnehin in manchen Punkten abweichende anglikanische Sprachgebrauch entwickelt. *H. Brandt (Halle).*

Hua, Loo-Keng, and Hsio-Fu Tuan: Determination of the groups of odd-prime-power order P^n which contain a cyclic subgroup of index P^2 . Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Kunming A 4, 145—154 (1940).

In dieser Arbeit wird dasselbe Problem behandelt, das G. A. Miller in Trans. Amer. Math. Soc. 2, 259—272 (1901); 3, 383—387 (1902) untersucht hat: Bestimmung der Struktur der p -Gruppen, $p > 2$, mit zyklischem Normalteiler vom Index p^2 . Sei \mathfrak{G} eine p -Gruppe der Ordnung p^n ($p \geq 3$, $n \geq 5$), die keine zyklische Untergruppe vom Index p , aber eine solche vom Index p^2 besitzt. Dann hat \mathfrak{G} stets einen Normalteiler \mathfrak{M} der Ordnung p^{n-1} der Art, daß

(1) $\mathfrak{M} = \{A_1, A_2\}$, $A_1^{p^{n-2}} = 1$, $A_2^p = 1$, $A_1^{-1} A_2^{-2} A_1 A_2 = (A_1, A_2) = A_1^{n-3+\delta}$, wobei $\delta = 0$ oder 1. Sei B ein beliebiges Element von \mathfrak{G} , das nicht zu \mathfrak{M} gehört, dann wird

$\mathfrak{G} = \{B, A_1, A_2\}$, $B^p = A_1^{a_1} A_2^{a_2}$, $B^{-1} A_1 B = A_1^{a_{11}} A_2^{a_{12}}$, $B^{-1} A_2 B = A_1^{a_{21}} A_2^{a_{22}}$, wobei $p \nmid a_1$, also

(2) $B^p = A_1^{a_1 p} A_2^{a_2}$

sein muß, weil die Ordnung von $B \leq p^{n-2}$ ist. — Da die p -te Potenz jedes Elementes von \mathfrak{M} zum Zentrum von \mathfrak{M} gehört, so wird $a_{11} \equiv 1 \pmod{p^{n-4}}$, folglich

(3) $(A_1, B) = A_1^{a_1 p^{n-4}} A_2^{a_{12}}$

und $(A_1^p, B) = A_1^{a_1' p^{n-4}} (A_1^{p^2}, B) = 1$.

Aus $(B^{-1}A_2B)^p = 1$ und $(A_2, B^p) = (A_2, A_1^{a_1 p} A_2^{a_2}) = 1$ folgt $a_{21} \equiv 0 \pmod{p^{n-3}}$, $a_{22} \equiv 1 \pmod{p}$. Durch Ersetzung von a_{21} durch $k_2 p^{n-3}$ erhält man die Beziehungen

$$(4) \quad (A_2, B) = A_1^{k_2 p^{n-3}}, \quad B^{-e} A_1 B^e = A_1^{(1+a_1' p^{n-4})e + \frac{e(e-1)}{2} a_{12} k_2 p^{n-3}} A_2^{e a_{12}}.$$

Speziell für $e = p$ ergibt sich $(A_1, B^p) = A_1^{a_1' p^{n-3}}$. Da $(A_1, B^p) = (A_1, A_1^{a_1' p} A_2^{a_2}) = A_1^{a_1' p^{n-3} + \delta}$ ist, gilt $(A_1, B) = A_1^{a_1' p^{n-4} + \delta + k_1 p^{n-3}} A_2^{a_{12}}$. \mathfrak{G} wird erzeugt durch A_1, A_2 und B nach den Regeln (1), (2), (3) und (4), wobei man stets B so wählen kann, daß die Ordnung von $B \leq p^2$ ist; im letzten Teil dieser Arbeit wird die Struktur von \mathfrak{G} konkret bestimmt.

K. Taketa.

Thomas, L. H.: On unitary representations of the group of De Sitter space. Ann. of Math., II. s. 42, 113—126 (1941).

Ausgangspunkt ist die 10-parametrische kontinuierliche Gruppe der linearen Transformationen, die die quadratische Form $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ invariant lassen. Die 10 infinitesimalen Operatoren $L, M, N, X, Y, Z; U, V, W, T$ und ihre Vertauschungsrelationen sind leicht angebar (übrigens sind die Vorzeichen bei U, V, W, T falsch angegeben). Die ersten 6 Operatoren (von L bis Z) erzeugen die Untergruppe der vierdimensionalen Drehungen, die das direkte Produkt von zwei dreidimensionalen Drehungsgruppen ist. Ausgehend von der bekannten Darstellungstheorie dieser Untergruppe werden nun sämtliche irreduziblen unitären Darstellungen der ganzen Gruppe durch unendliche Matrices aufgestellt. Die Methode ist folgende: Nach der Ausreduktion der Untergruppe sind die 6 Matrices L bis Z bekannt. Die übrigen vier sind mit ihnen durch 15 lineare und untereinander durch 6 quadratische Vertauschungsrelationen verknüpft. Auf Grund der linearen Relationen werden sehr viele Matrixelemente Null. Die quadratischen Relationen, die sich auf einer von ihnen reduzieren, und die Irreduzibilitätsforderung schränken die Möglichkeiten noch weiter ein. Ergebnisse: Jede Darstellung hängt von zwei Zahlen p, q ab. In den folgenden Formeln sind die halbganzen oder ganzen Zahlen j_1, j_2, m_1, m_2 Zeilenindices, ebenso j'_1, j'_2, m'_1, m'_2 Spaltenindices. Dabei nimmt m_1 nur die Werte $-j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1$ an, und dasselbe gilt für m_2 und k_2 . Die Matrixelemente $(j_1, m_1, j_2, m_2 | L | j'_1, m'_1, j'_2, m'_2)$ usw. werden durch Formeln wie

$$\begin{aligned} (j_1, m_1, j_2, m_2 | L + X | j_1, m_1 + 1, j_2, m_2) &= \sqrt{(j_1 - m_1)(j_1 + m_1 + 1)} \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | L + X | j_1, m_1 - 1, j_2, m_2) &= \sqrt{(j_1 + m_1)(j_1 - m_1 + 1)} \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | N + Z | j_1, j_1, m_2, m_2) &= 2m_1 \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | N - Z | j_1, m_1, j_2, m_2) &= 2m_2 \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | T + iW | j_1 - \tfrac{1}{2}, m_1 - \tfrac{1}{2}, j_2 - \tfrac{1}{2}, m_2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= f(j_1, j_2) \sqrt{(j_1 + m_1)(j_2 - m_2)} \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | T + iW | j_1 + \tfrac{1}{2}, m_1 - \tfrac{1}{2}, j_2 - \tfrac{1}{2}, m_2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= g(j_1, j_2) \sqrt{(j_1 - m_1 + 1)(j_2 - m_2)} \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | T + iW | j_1 - \tfrac{1}{2}, m_1 - \tfrac{1}{2}, j_2 + \tfrac{1}{2}, m_2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= h(j_1, j_2) \sqrt{(j_1 + m_1)(j_2 + m_2 + 1)} \\ (j_1, m_1, j_2, m_2 | T + iW | j_1 + \tfrac{1}{2}, m_1 - \tfrac{1}{2}, j_2 + \tfrac{1}{2}, m_2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= k(j_1, j_2) \sqrt{(j_1 - m_1 + 1)(j_2 + m_2 + 1)} \end{aligned}$$

gegeben. Dabei sind $f(j_1, j_2), g(j_1, j_2), h(j_1, j_2), k(j_1, j_2)$ Ausdrücke folgender Art:

$$f(j_1, j_2) = i \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - p)(j_1 + j_2 + p + 1)(j_1 + j_2 - q)(j_1 + j_2 + q + 1)}{2j_1(2j_1 + 1)2j_2(2j_2 + 1)}}$$

Auf Grund dieser Formeln ist jede irreduzible Darstellung bestimmt durch die reellen Zahlen $(p + \frac{1}{2})^2$ und $(q + \frac{1}{2})^2$ und durch die Angabe der möglichen Werte der Zeilenindices j_1, j_2 . Sind p und q gegeben, so gibt es in den meisten Fällen eine, in beson-

deren Fällen zwei oder drei Darstellungen. p und q sind aber nicht willkürlich wählbar; z. B. muß eine von ihnen eine halbganze oder ganze Zahl sein. Für $j_1 - j_2$ kommen immer nur endlich viele, für $j_1 + j_2$ immer unendlich viele Werte in Betracht, und zwar sind $j_1 - j_2$ und $j_1 + j_2$ beide stets ganz im Fall einer eindeutigen, halbganz im Fall einer zweideutigen Darstellung. van der Waerden (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Richard, Ubaldo: Uno sguardo alla teoria degli insiemi. *Saggiatore* 1, 283—291 (1940).

Kurzer Bericht über Ursprung, philosophische Beziehungen, Grundlagen und Schwierigkeiten der Mengenlehre. G. Hajós (Budapest).

Dushnik, Ben, and E. W. Miller: Concerning similarity transformations of linearly ordered sets. *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 322—326 (1940).

Es werden zwei Fragen aufgeworfen und gelöst. Die erste Frage ist die nach einem Analogon des Satzes, daß jede unendliche Menge eine echte Teilmenge von derselben Mächtigkeit hat, und lautet: Hat jede geordnete unendliche Menge eine ähnliche echte Teilmenge? Die Antwort ist nur für die abzählbaren Mengen bejahend, während die Ungültigkeit der Behauptung für un abzählbare Mengen durch ein Beispiel gezeigt wird. Das zweite Problem steht mit dem folgenden bekannten Satz im Zusammenhang: Ist die Funktion f eine ähnliche Abbildung einer wohlgeordneten Menge in eine Teilmenge, so gilt für jedes Element a der Menge $f(a) \geq a$. Es wird gefragt, ob diese Eigenschaft die wohlgeordneten Mengen charakterisiert? Die Antwort ist, — eben, wie im ersten Fall — bejahend für abzählbare Mengen, und, wie ein Beispiel zeigt, für un abzählbare Mengen negativ. L. Egyed (Budapest).

Novikoff, P.: Sur les ensembles effectivement non dénombrables. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math.* 1939, 35—39 u. franz. Zusammenfassung 39—40 [Russisch].

Considérons l'espace de Baire ou bien l'ensemble de toutes les suites infinies d'entiers positifs. Le n -ième élément d'une suite infinie d'entiers positifs sera appelé n -ième chiffre du développement d'un point donné. Étant donnée une suite de points dans l'espace de Baire, soit $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots\}$, nous dirons qu'elle définit effectivement un point $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ de cet espace, si un nombre fini quelconque de chiffres du développement de $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ est parfaitement défini à partir d'un nombre fini de chiffres des développements d'un nombre fini de termes de la suite considérée. Un ensemble est dit effectivement non dénombrable, si l'on peut faire correspondre à chaque suite dénombrable de ses éléments un élément de cet ensemble effectivement défini par cette suite et ne lui appartenant pas. Le but du présent article est de démontrer que chaque ensemble effectivement non dénombrable contient un ensemble parfait, donc a la puissance du continu. Le réciproque est évident.

Extrait.

Arsenin, B.: Sur les projections des ensembles mesurables B. *Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math.* 1939, 233—239 u. franz. Zusammenfassung 239—240 [Russisch].

Soit (1) $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ une suite finie ou dénombrable d'ensembles linéaires, mesurables B, et E un ensemble plan de même nature qui est coupé par toute parallèle à l'axe OY en un ensemble congruent à l'un des ensembles de la suite (1). Alors l'ensemble E peut être uniformisé au moyen d'un ensemble mesurable B. Par suite la projection de E sur l'axe OX est de même un ensemble mesurable B. Il est évident que le cas des ensembles uniformes mesurables B est celui, où la suite (1) se réduit à un seul ensemble, formé d'un seul point. Il est impossible de remplacer dans ce théorème la transformation de congruence par l'homéomorphie ou la similitude. C'est une conséquence du théorème suivant: Tout ensemble analytique linéaire est la projection d'un ensemble plan du type G_δ qui est coupé par toute droite parallèle à l'axe OY suivant des ensembles qui sont deux à deux semblables et homéomorphes. *Extrait.*

Arsenin, V.: Sur la nature des projections de certains ensembles mesurables B. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 403—410 u. franz. Zusammenfassung 410 (1940) [Russisch].

L'auteur démontre le théorème suivant: Soit E un ensemble plan mesurable B et H l'ensemble de tous les points x de l'axe OX tels que la droite $x = x_0$ coupe E suivant des ensembles F_σ non vides. Alors H est un ensemble CA . En particulier, si chaque droite $x = x_0$ coupe E suivant un F_σ , alors la projection de E sur OX est mesurable B. Ce théorème présente la solution d'un problème posé par P. Novikoff (ce Zbl. 21, 393). Deux théorèmes de la même nature démontrés récemment par Kunugui (ce Zbl. 21, 112; 22, 317) sont des cas très particuliers du théorème énoncé.

Extrait.

Koslova, Z.: Sur les ensembles plans analytiques ou mesurables B. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 4, 479—500 u. franz. Zusammenfassung 500 (1940) [Russisch].

L'auteur précise deux théorèmes de Lusin sur les ensembles analytiques plans et généralise quelques théorèmes obtenues par V. Glivenko, ainsi que par P. Novikoff (ce Zbl. 9, 104) et A. Liapounoff (ce Zbl. 9, 105). Soit E un ensemble analytique plan qui est coupé par chaque parallèle à l'axe OY suivant des ensembles bien ordonnés de type $\leq \alpha$. Alors l'ensemble E peut être enfermé dans un ensemble mesurable B jouissant de la même propriété. On obtient des autres théorèmes en remplaçant respectivement les mots „bien ordonnés“ par les mots: „réductibles“ et „clair-semés“, ou les mots „bien ordonnés de type $\leq \alpha$ “ par les mots „parfaits non denses“. En outre l'auteur démontre le théorème suivant: Un ensemble mesurable B plan qui est coupé par chaque parallèle à l'axe OY suivant des ensembles bien ordonnés de type $\leq \alpha$ peut être décomposé en une suite bien ordonnée du type $\leq \alpha$ d'ensembles mesurables B uniformes et disjoints. On y peut remplacer les mots „bien ordonné“ par le mot „réductible“.

Extrait.

Liapounoff, A.: Sur l'uniformisation de quelques ensembles CA et A'_2 . Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 41—50 u. franz. Zusammenfassung 51—52 [Russisch].

En poursuivant ses recherches récentes (Bull. Acad. Sci. URSS 1937, Nr 2) l'auteur démontre les théorèmes suivants: L'existence d'un ensemble CA (ou A'_2) ayant un système non dénombrable de constituantes fermées entraîne l'existence d'un complémentaire analytique qui ne contient aucun ensemble parfait. Tout ensemble plan CA (ou A'_2) dont toutes les constituantes sont fermées, peut être toujours uniformisé au moyen d'un ensemble CA (ou A'_2). Tout ensemble plan CA (ou A'_2) qui est coupé par chaque droite $x = \text{const}$ suivant un ensemble fermé ou vide, peut être toujours uniformisé au moyen d'un ensemble CA (ou A'_2). D'ailleurs l'a. démontre qu'il y a des cas où l'on peut uniformiser un ensemble A'_2 au moyen d'un ensemble de même nature quand les théorèmes précédents ne sont pas applicables. Ainsi vaut le théorème: Soit $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ un système d'ensembles A'_2 tels que toute parallèle à l'axe OY coupe chacun d'eux suivant un ensemble fermé ou vide. Soit

$$E = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_k E_{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Alors l'ensemble E peut toujours être uniformisé au moyen d'un ensemble A'_2 . Soit en outre C_1 un crible mesurable B (ou même B'_2) et C_2 un crible CA'_2 . Alors l'ensemble des points, où l'indice de C_1 est supérieur ou égal à l'indice de C_2 , est un ensemble A'_2 . Pour le cas des ensembles CA_n cette proposition a été obtenue par C. Kuratowski (ce Zbl. 15, 397).

Extrait.

Liapounoff, A.: Sur une propriété des σ s-opérations. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 407—411 u. franz. Zusammenfassung 411—412 [Russisch].

On appelle ensembles A'_n les projections des ensembles CA_{n-1} uniformes. Les complémentaires des ensembles A'_n sont des ensembles CA'_n ; les ensembles qui sont en même temps des ensembles A'_n et CA'_n sont des ensembles B' . On désigne par \tilde{N} la base réduite et complète définie par L. Kantorovich et E. Levenson (ce Zbl. 4,

294; 7, 241). L'auteur démontre le théorème suivant: La famille des ensembles B'_n est invariante par rapport à chaque δs -opération de Hausdorff et Kolmogoroff, dont la base \tilde{N} est un ensemble B'_n . Il suit de ce théorème que la plus petite famille d'ensembles, qui est invariante par rapport aux opérations A et C ou, plus généralement, par rapport à l'opération $R(CA)$ et qui contient tous les ensembles A_2 et CA_2 est contenue dans la famille des ensembles B'_3 . *Extrait.*

Liapounoff, A.: Séparabilité multiple pour le cas de l'opération (A). Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 539—551 u. franz. Zusammenfassung 551—552 [Russisch].

Soit M un corps de sousensembles d'un ensemble abstrait X . Désignons par $A(M)$ la classe de tous les ensembles que l'on peut obtenir au moyen de l'opération (A) à partir d'ensembles du corps M . Soit $CA(M)$ la classe des ensembles complémentaires par rapport à X aux ensembles de la classe $A(M)$. Soit $B(M)$ la réunion de tous les ensembles qui font simultanément partie de $A(M)$ et de $CA(M)$. En posant

$$A(\{W_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_k W_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

on trouve les théorèmes suivants: Étant donné un système d'ensembles $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de la classe $A(M)$ tel que $A(\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0$, il existe toujours un système d'ensembles $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de la classe $B(M)$ tel que $A(\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0$ et $H_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k}$ pour toute suite k, n_1, n_2, \dots, n_k d'entiers positifs. — Quel que soit le système $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ d'ensembles de la classe $A(M)$ il existe un système d'ensembles $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ de la classe $CA(M)$ tel que

$$A(\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}) = 0 \quad \text{et} \quad H_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset E_{n_1 n_2 \dots n_k} - A(\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\})$$

pour toute suite k, n_1, n_2, \dots, n_k d'entiers positifs. Ces théorèmes peuvent être généralisés aux cas des ensembles projectifs de la classe CA_2 . *Extrait.*

Inagaki, Takeshi: Quelques propriétés des espaces abstraits. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 9, 193—208 (1940).

Verf. zeigt die Äquivalenz einiger Sätze in abstrakten Räumen. Das erste Theorem behauptet, daß in einem insichdichten akzessiblen Raum die folgenden Aussagen äquivalent sind: 1) jede nicht dichte Menge ist separabel; 2) jede un abzählbare Menge ist entweder separabel oder enthält einen insichdichten Kern, der in einer nichtleeren, offenen Menge überall dicht ist. Ähnliche Äquivalenzbehauptungen gelten ferner für die Fréchet'schen V-Räume. *L. Egedy (Budapest).*

Sierpiński, W.: Sur les espaces métriques universels. Atti Accad. Sci. Torino 75, 571—574 (1940).

Ein Raum U der Mächtigkeit m heißt universeller metrischer Raum, falls alle metrischen Räume derselben Mächtigkeit m auf einen Teil von U isometrisch abbildbar sind. — Verf. zeigt unter Annahme der Cantorschen Vermutung über die Aleph's, daß es für jede Mächtigkeit $> \aleph_0$ einen solchen Raum U gibt. Insbesondere erweisen sich die Kontinuumshypothese ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) und die Behauptung der Existenz eines universellen metrischen Raumes der Mächtigkeit \aleph_1 als äquivalente Aussagen.

D. Barbilian (București).

Phillips, R. S.: A decomposition of additive set functions. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 274—277 (1940).

Es werden die additiven Funktionen additiver Mengenklassen untersucht und einige Zerlegungstheoreme über sie bewiesen. *L. Egedy (Budapest).*

Kronrod, A.: Sur la structure de l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction dérivable en ses points de continuité. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 569—577 u. franz. Zusammenfassung 578 [Russisch].

Bekanntlich ist die Menge \mathfrak{M} der Stetigkeitspunkte einer, in einem Intervall definierten, reellen Funktion $f(x)$ vom Typus G_δ . Verf. wirft die Frage auf, wann \mathfrak{M} zugleich vom Typus F_σ ist. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß $f(x)$ folgende

Eigenschaft (A) besitzt: Es gibt eine Funktion $\varphi(x)$ mit $\lim_{x \rightarrow 0} x\varphi(x) = 0$; zu jedem Stetigkeitspunkt a von $f(x)$ kann man je ein $\delta > 0$ so angeben, daß mit $|x - a| < \delta$

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \varphi(|x - a|)$$

ist. Eine in allen ihren Stetigkeitspunkten differenzierbare Funktion besitzt diese Eigenschaft (A). Ist \mathfrak{M} nicht vom Typus F_σ , so gibt es, wie auch φ gewählt wird, kontinuierlich viele Stetigkeitspunkte a , in denen kein der Eigenschaft (A) entsprechendes δ bestimmbar ist. Ist eine Menge \mathfrak{N} zugleich vom Typus G_δ und F_σ und φ eine für positive x definierte positive Funktion, so gibt es eine Funktion $f(x)$, die in den Punkten von \mathfrak{N} und nur dort stetig ist und mit dem angegebenen φ die Eigenschaft (A) besitzt. — Die Sätze werden auch für Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinert.

G. Hajós (Budapest).

Maximoff, Isaiah: On density points and approximately continuous functions. Tôhoku Math. J. 47, 237—250 (1940).

Ein Punkt x_0 einer meßbaren Menge E wird Dichtigkeitspunkt von E in einem Intervall $[a, b]$ genannt, falls $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m[i_\delta E]}{m(i_\delta)} = 1$ ist, wo $i_\delta = [a, b] \cdot (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ und $\delta = \delta' + \delta''$ ist, während mE das lineare Maß von E bezeichnet. Mit Hilfe dieses Begriffes beweist Verf. zuerst das Theorem: Sind X_1, X_2 perfekte Mengen und E eine B-meßbare Menge, ferner $X_1 \subset X_2 \subset E$ und jeder Punkt von E Dichtigkeitspunkt von E in $[a, b]$, so gibt es eine perfekte Menge P , die die folgenden Bedingungen erfüllt: 1) $X_2 \subset P \subset E$, und jeder Punkt von X_1 ist Dichtigkeitspunkt von P in (a, b) . 2) $mP = \mu$, wo μ eine die Relation $mX_2 < \mu < mE$ erfüllende gegebene Zahl ist. 3) P ist in X_2 nirgendsdicht, falls X_2 nirgendsdicht ist. — Verf. nennt eine Funktion von erster Klasse im Punkte x_0 approximativ stetig, falls es zu x_0 eine perfekte Menge $P(x_0)$ gibt derart, daß x_0 Dichtigkeitspunkt von $P(x_0)$ in $[a, b]$ und die Funktion stetig auf dieser Menge $P(x_0)$ ist. Verf. gibt dann eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion approximativ stetig sei.

L. Egged (Budapest).

Mandelbrojt, Szelem: Sur les fonctions convexes. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 977—978 (1939).

Wenn $\varphi(t)$ eine in $(-\infty, +\infty)$ definierte Funktion ist, so ist $f(x) = \max_{t \in (-\infty, +\infty)} [xt - \varphi(t)]$ nichtkonkav in $(-\infty, +\infty)$. Für irgendeine nichtkonkave Funktion $f(x)$ in $(-\infty, +\infty)$ gibt es ein $\varphi(t)$. Man hat z. B.

$$f(x) = \max_{t \in (-\infty, +\infty)} \left\{ xt - \max_{\tau \in (-\infty, +\infty)} [t\tau - f(\tau)] \right\}$$

[Die Funktionen können auch nichtendlich sein.]

T. Popoviciu (Bucureşti).

Analysis.

Allgemeines:

● Scheffers, Georg: Lehrbuch der Mathematik. Zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. 8. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter 1940. VIII, 743 S. geb. RM. 15.—.

● Franklin, Philip: A treatise on advanced calculus. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall 1940. XIV, 595 S. \$ 6.—.

● Sirk, Hugo: Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. Eine Einführung in die Anwendungen der höheren Mathematik. Dresden u. Leipzig: Theodor Steinkopff 1941. XII, 268 S., 1 Taf. u. 126 Abb. Geb. RM. 12.—.

Das Buch behandelt die Hauptpunkte der Differential- und Integralrechnung bei einer und mehreren Veränderlichen und berührt das Nächstliegende bei Differentialgleichungen. Ein größerer Anhang stellt das Rüstzeug aus der Schulmathematik zusammen. Ein sehr ausführliches Sachverzeichnis hilft beim Nachschlagen. Die Dar-

stellung stützt sich auf eine reichhaltige und gelungene Auswahl von Beispielen aus der Chemie und Physik, die in den Vordergrund gestellt wird. Um den naturwissenschaftlich ausgerichteten Lesern entgegenzukommen, wird die mathematische Schärfung der Begriffe und Methoden stark zurückgedrängt. — Wenn wir das Buch auch noch zu den gelungenen Versuchen seiner Art stellen können, so darf doch eine ganze Reihe sachlicher, sprachlicher und satztechnischer Unzulänglichkeiten nicht übersehen werden. Z. B. kommt nirgends der Begriff „absoluter Betrag“ vor; das veranlaßt Fehler bei der Reihenlehre. Sätze wie „Es gibt kein $F(x)$, das differenziert e^{-x} gäbe“ und „Funktionen, die durch Reihen dargestellt werden können, nennt man analytische“, sind falsch. — Wir sind überzeugt, daß die Unterweisung in Mathematik nur erschwert wird durch die unselige Scheu mancher Verfasser, ihren Lesern an einer entscheidenden Stelle etwas zuzumuten. Das führt zu Umständlichkeiten, die dem Leser noch viel mehr zumuten.

Ulrich (Gießen).

● Oberdorfer, Günther: Lehrbuch der Elektrotechnik. 2. Bd.: Rechenverfahren und allgemeine Theorien der Elektrotechnik. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1940. 377 S. u. 123 Abb. geb. RM. 18.50.

Aus dem Vorwort: „Was meiner Ansicht nach bisher fehlte, war ein ausgesprochen für den Elektroingenieur geschriebenes mathematisches Buch, das möglichst alle für ihn praktisch in Betracht kommenden Verfahren enthält, sich — unter Preisgabe vielleicht von manchen exakten Beweisführungen — bei jedem Verfahren aber so weit bescheidet, daß dessen Wesen und Brauchbarkeit leicht erkannt und das Verfahren selbst ohne weiteres Studium auf einfachere Fälle angewandt werden kann.“ — Wir sind bereit, diesem Standpunkt zuzustimmen; es muß aber im Interesse der Benutzer gefordert werden, daß ein solches Buch mathematisch zuverlässig sei, nur in sich richtige Lehrsätze hinstelle, so gut als möglich die feste Fachsprache achte, den Anschluß an weitere mathematische Literatur erleichtere und Rechenverfahren so darstelle, wie sie möglichst praktisch durchzuführen sind. — Abgesehen von der Stoffwahl (siehe Inhalt, unten) ist das Buch — auch wenn es kein Mathematiklehrbuch sein will — als mathematisch vollkommen verfehlt zu bezeichnen. — Eine gewisse Rechengewandtheit des Verf. bietet noch keine ausreichende Grundlage für ein geeignetes Lehrbuch; dem Verf. ist es nicht gelungen, den Vorgang der mathematischen Einkleidung naturwissenschaftlicher Sachverhalte durchsichtig darzustellen. Noch mehr aber: Das Buch ist unzuverlässig ebenso durch Mißverständnisse wie durch Sorglosigkeit; es verwirrt die Fachsprache und erschwert den Anschluß an die Literatur. Es bringt fast alle Fehler als Behauptungen, welche wir im Anschluß an mathematische Vorlesungen zu hören gewohnt sind, und ergänzt sie durch solche, die auch uns verblüffen. Es führt Rechenbeispiele so vor, wie es gerade der Praktiker nie machen darf. Es mißhandelt die deutsche Sprache und zeigt, daß auf Korrekturlesen kein Wert gelegt wurde. — Ich habe diese Sätze zu beweisen: Bei linearen Gleichungen ist der Fall widersprechender Gleichungen vergessen. — Im Reellen wird eine Funktion als stetig definiert, wenn sie differenzierbar ist; im Komplexen wird es aber richtig gemacht. — Was Funktionen sind, wird höchst verwirrend dargestellt: „Eine Funktion gibt das Gesetz an, durch das zwei Veränderliche miteinander verbunden sind; ... eine Funktion zweier Veränderlicher kann durch eine Kurve dargestellt werden“ (S. 22f.). — „Die Wurzeln eines Polynoms können durch Nullsetzen gefunden werden“ (S. 25 — als wäre das ein Rechenverfahren). — „Mit Hilfe der Funktion $\operatorname{sign} x$ lassen sich also beliebige Funktionen mit Unstetigkeitsstellen in geschlossener Form darstellen“ (S. 33). — „Ist $y'' = 0$, dann liegt ein Wendepunkt vor“ (S. 35). — Neben die gewöhnliche unendliche Reihe $\sum a_n f_n(x)$, die als Summenreihe bezeichnet wird, stellt der Verf. als Neuschöpfung die Produktreihe $\prod a_n f_n(x) = a_0 \cdot a_1 f_1(x) \cdot a_2 f_2(x) + \dots$ (Sic!). „Beide Formen sind für die Darstellung transzendenter Funktionen ... von Wichtigkeit.“ (S. 58 — weiteres über das Novum wird verschwiegen.) — Eine Reihe heißt konvergent, „wenn der Grenzwert für das n -te Glied $\lim g_n = a$ ist und wenn a gegen Null geht, also $|g_n - a| < \varepsilon$ kleiner wird als jede noch so kleine positive Zahl“ (S. 58/59). — Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe werden durcheinandergebracht (S. 59—61; dort eine Fülle schwerer Druckfehler). — Daß jede analytische Funktion von z in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, verdankt Verf. einer Arbeit aus dem Jahre 1926 (lt. Zitat S. 114). Die geom. Reihe konvergiert gleichmäßig für $|z| < 1$ (vorsichtshalber wird aber gleichmäßige Konvergenz dort nicht erklärt). S. 116 finden wir eine besondere Blütenlese an Taylorschen Entwicklungen. 1: $(1+z) = 1 - z + z^2 - \dots$ konvergiert für $|z| < \infty$ und liefert integriert die bekannte log. Reihe. Dagegen wird $\frac{1}{1-z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$ und $\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2 \cdot 1!} + \frac{z^3}{3 \cdot 2!} + \dots$ (jetzt für $|z| < 1$). Die nächste Zeile bringt e^z richtig. — S. 117: „Eine Stelle, wo $f'(z)$ verschwindet, ist eine singuläre Stelle; solche Stellen werden auch Nullstellen genannt.“ — S. 120: Residuensatz

geht in die Cauchysche Integralgleichung über. — S. 121/2 Fehlerkette um die Gammafunktion. Z. B. wird in (2) für ungerades t einfach $(t + n)!$ zur Abkürzung für ein Polynom gebraucht und wenige Zeilen später erklärt, daß diese Gleichung für ungerades Argument nicht angeschrieben werden könne. „Umgekehrt kann aber die Gammafunktion als erweiterter verallgemeinerter Definitionsbereich der Fakultät aufgefaßt werden.“ — Völliger Wirrwarr herrscht im Kapitel über Matrizen und Netzwerke. z_{ij} bezeichnet bald eine Matrix, bald eines ihrer Elemente, i , Vektor und Komponente, bald Zeile, bald Spalte, i Stromstärke und Index. Die Matrizenmultiplikation erfolgt bald Zeile über Zeile, bald Zeile über Spalte, je nachdem man einzeilige oder quadratische Matrizen vor sich hat. Matrizendivision wird für unmöglich erklärt, als Ersatz die Reziproke (bis auf die Vorzeichen der alg. Komplemente richtig) erklärt, kurz darauf aber durch eine Zeile gekürzt (S. 224/5, 230). Man lese als Probe: $u_i = z_{ij}i_j$ (sic!) und: „Man überzeugt sich leicht, daß durch Vertauschen der Faktoren eines Matrizenprodukts der erste durch die transponierte Matrix ersetzt werden muß“ (Aufgabe an den Leser: Wie viele Fehler enthält dieser Satz?) — Ich muß es mir versagen, weitere Beispiele anzuführen. Ich habe das Buch genau gelesen, und auch zu sehr großen n stets sofort einen $(n + 1)$ -ten Fehler gefunden. Die obige Auswahl ist nur unter dem Gesichtspunkt erfolgt: Was kann auf knappem Raum wiedergegeben werden. Es gibt Abschnitte in dem Buch, wo die Fehler dicht zu liegen scheinen. — Inhaltsverzeichnis: I. Rein math. Rechenverfahren der Elektrotechnik. A. Elementare Hilfsmittel. B. Differential- und Integralrechnung. C. Geom. Darstellung. D. Komplexe Rechnung. E. Spezielle Funktionen und Integrale. F. Operatorenrechnung. G. Vektorrechnung. II. Mit der Elektrotechnik in bevorzugtem Maße zusammenhängende Rechenverfahren. A. Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik. B. Ortskurventheorie. C. Symmetrische Komponentenrechnung. D. Fouriersche Reihenentwicklung. E. Bahnkurven. F. Matrizen- und Tensorrechnung. G. Heavisidesche Operatorenrechnung und Laplace-Transformation. III. Selbständige Theorien der Elektrotechnik. A. Zweipoltheorie. B. Vierpoltheorie. C. Homogene Kettenleiter. D. Konforme Abbildung in der Elektrostatik. Ulrich (Gießen).

Erdős, P.: Note on some elementary properties of polynomials. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 954—958 (1940).

$f(x)$ sei ein reelles Polynom vom Grade $n \geq 2$ mit lauter reellen Wurzeln; es sei ferner $f(x) \neq 0$ für $|x| < 1$, $f(-1) = f(+1) = 0$ und $\max_{|x| \leq 1} f(x) = 1$. Verf. beweist: Sind $a < b$ zwei in $(-1, +1)$ liegende Zahlen, für die $f(a) = f(b) = d \leq 1$ ausfällt, so gilt die Ungleichung $b - a \leq 2\sqrt{1-d}$; Integration über d gibt die schon bekannte Ungleichung $\int_{-1}^{+1} f(x) dx \leq \frac{4}{3}$ (vgl. dies. Zbl. 21, 395); das Gleichheitszeichen steht in beiden Fällen nur für $f(x) = 1 - x^2$. Anschließend äußert Verf. eine Reihe von Vermutungen, z. B. 1) das Maximum von $\int_{-1}^{+1} |f(x)| dx$ unter allen reellen Polynomen n -ten Grades, deren sämtliche Wurzeln in $(-1, +1)$ liegen, und für die $\max_{|x| \leq 1} |f(x)| = 1$ ist, wird für $f(x) = T_n(x x_n)$ angenommen, wo T_n das n -te Tschebyscheffsche Polynom, x_n dessen größte Wurzel bedeuten. 2) Sind unter den gleichen Voraussetzungen x_i die der Größe nach geordneten Wurzeln von $f(x)$, so gilt mit einer von i unabhängigen Konstanten $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)| dx \leq d_n(x_{i+1} - x_i)$, und das Gleichheitszeichen tritt nur für $f(x) = T_n(x x_n)$ ein. Harald Geppert (Berlin).

Carrese, Pietro: Sull'equazione $x^y = y^x$. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 318—320 (1941).

Die Gleichung $x^y = y^x$ hat neben der Lösung $x = y$ noch die folgende: $x = r^{\frac{1}{r-1}}$, $y = r^{\frac{r}{r-1}}$ mit beliebigem Parameter $r \neq 0$; die letzte Kurve geht durch (e, e) und hat die Asymptoten $x = 1$, $y = 1$. Harald Geppert (Berlin).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Frink jr., Orrin: Series expansions in linear vector space. Amer. J. Math. 63, 87—100 (1941).

This paper discusses the expansion problem of every element x of a real or com-

plex Banach space into a series $x = \sum \alpha_n p_n$, in terms of a fixed set $\{p_n\}$, α_n being real or complex numbers. To secure the uniqueness of the expansion, $\{p_n\}$ is assumed to be minimal in the sense that no element of the set $\{p_n\}$ is the limit of a sequence of linear combinations of the other elements of the set $\{p_n\}$. It is found that the expansion theory of this paper is just as general as the theory of expansion discussed in the treatise of Banach. The method of determining the expansion coefficients used here suggests that semiregular methods of summation are the natural methods for investigation of minimal series. The Newton interpolation series are a special case of minimal polynomial series, and further the inclusion of a complex Banach space allows interesting applications to the theory of functions of a complex variable, including power series.

Tosio Kitagawa (Hukuoka).

Graves, Lawrence M.: Some general approximation theorems. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 281—292 (1941).

Si considera il problema dell'approssimazione delle funzioni nel caso in cui le funzioni approssimanti non appartengano ad una determinata classe, ma siano sottoposte a condizioni generali, cui soddisfano le più note successioni di polinomi approssimativi. L'A. stabilisce, in forma generale e con semplici dimostrazioni, proprietà prevalentemente rilevate da altri AA. (Landau, De La Vallée Poussin, Tonelli, Hahn, Cinquini, Lorenz ecc.), e fra le quali citiamo il seguente teorema: Sia $A \equiv [0 \leq x_i \leq a_i, (i = 1, 2, \dots, m)]$, sia $f(x)$ una funzione definita in A con $|f(x)|^p$, ($1 \leq p < +\infty$) integrabile in A , sia $\{Q_n(x)\}$ una successione di funzioni limitate e misurabili in $B \equiv [-a_i \leq x_i \leq a_i, (i = 1, 2, \dots, m)]$, sia k_n una successione di numeri positivi e

$$P_n(x; f) = k_n \int_A f(z) Q_n(z - x) dz.$$

Supposto che: I) $\frac{1}{k_n} = \int_B Q_n(x) dx$; II) ogni $Q_n(x)$ sia non negativa in B , e positiva in un insieme parziale di B di misura positiva; III) per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n Q_n(x) = 0$ uniformemente in $B - S_\varepsilon$, ove S_ε è l'interno della sfera di centro nell'origine e raggio ε ; risulta: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |P_n(x) - f(x)|^p dx = 0$; b) ogni sottosuccessione $P_{n_j}(x)$ converge a $f(x)$ quasi-dappertutto in A ; c) gli integrali $\int_E |P_n(x)|^p dx$ sono equiassolutamente continui; d) se M è il limite superiore di $|f(x)|$, risulta $|P_n(x)| \leq M$; e) se $p + q = pq$, (ove $1 \leq p \leq \infty$), e se $|g(x)|^q$ è integrabile è $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |g(x)| |P_n(x) - f(x)| dx = 0$.

S. Cinquini (Pavia).

Erdős, P.: On divergence properties of the Lagrange interpolation parabolas. *Ann. of Math.*, II. s. 42, 309—315 (1941).

Bezeichnet man mit $x_\alpha^{(n)}$ die nach ihrer Größe geordneten Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynomes n -ten Grades, so zeigt man zunächst $x_i^{(n)} - x_j^{(n)} > n^{-3}$ für $m \geq n$. Setzt man $x_0 = \cos(p\pi/q)$, $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$, so gibt es zwei Konstanten c_1 und c_2 , so daß die Beziehungen $\min_{i=1, \dots, n} |x_0 - x_i^{(n)}| > c_1 n^{-1}$, $|T_n(x_0)| > c_2$ erfüllt sind. Ist

$l_k^{(n)}(x_0) = T_n(x_0)/T_n'(x_0) \cdot (x_0 - x_k)$ und wird die Summe \sum' über alle $x_k^{(n)}$, die $|x_k^{(n)} - x_0| > (\ln n)^{-1/2}$ genügen, erstreckt, so besteht die Relation $\sum' |l_k^{(n)}(x_0)| < (\ln n)^{1/2}$.

Aus $0 < x_k^{(n)} < x_j^{(n)}$ folgt $|l_k^{(n)}(x_0)| > \frac{c_4}{j-k}$; endlich zeigt man, daß

$$\sum_{(2k-1, n)=1} |l_k^{(n)}(x_0)| > c_6 \ln n / \ln \ln n$$

ist. Es ist jetzt möglich, eine stetige Funktion $f(x)$ zu konstruieren, so daß für die Interpolationsparabel nach Lagrange (an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$) $L_n f(x)$ mit wachsendem $n \rightarrow +\infty$ $L_n(f(x_0)) \rightarrow \infty$ wird. Ist jedoch $x_0 \neq \cos p\pi/q$, $p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$, so gibt es für jede stetige Funktion $f(x)$ eine Folge $n_1 < n_2 < n_3 \dots$, so daß $L_{n_i}(f(x_0)) \rightarrow f(x_0)$

geht. Der Beweis dieser Behauptung gelingt mit Hilfe des Hilfssatzes: Ist $x_0 \neq \frac{p}{q}$, $p \equiv q \equiv 1, \pmod{2}$, dann hat die Ungleichung $\left| x_0 - \frac{2r-1}{2n_k} \right| < \frac{c_{14}}{n_k^2}$ eine unendliche Anzahl von Lösungen.

F. Knoll (Wien).

Quade, W.: Abschätzungen zur trigonometrischen Interpolation. Deutsche Math. 5, 482—512 (1941).

Ausgehend von den bekannten Grundformeln für trigonometrische Interpolation mit einer geraden oder ungeraden Anzahl äquidistanter Ordinaten und nach Erklärung der Begriffe „Stetigkeitsmodul“ nach de la Vallée-Poussin und „Lipschitz-Bedingung der Ordnung α “ werden die Konstanten des Interpolationspolynoms $T_n(x)$ durch $|A_m| \leq \frac{\pi}{m} \frac{\omega(h)}{h}$, $|B_m| \leq \frac{\pi}{m} \frac{\omega(h)}{h}$ abgeschätzt ($f(x)$ von der Periode 2π und vom Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$, h entsprechender Teil der Periode). Ist $f(x)$ im Periodenintervall von der beschränkten Schwankung V , so erhält man die Abschätzungen $|A_m| \leq \frac{V}{2m}$, $|B_m| \leq \frac{V}{2m}$. Ist $\omega_r(\delta)$ der Stetigkeitsmodul von $f^{(r)}(x)$, so hat man $|A_m| \leq 2 \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{r+1} \frac{\omega_r(h)}{h}$, $|B_m| \leq 2 \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{r+1} \frac{\omega_r(h)}{h}$; ist $f^{(r)}(x)$ von der beschränkten Schwankung V_r , so ergibt sich: $|A_m| \leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{r+1} V_r \geq |B_m|$. Für die Differenzen zwischen den Fourierkonstanten a_m, b_m und A_m, B_m ergibt sich, falls $f(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ besitzt, $|a_m - A_m| \leq \omega(h/2) \cdot (2 + \pi m h/12) \geq |b_m - B_m|$; überschreitet jedoch $|f^{(r)}(x)|$ den Betrag M_r , nicht, so erhält man $|a_m - A_m| < \frac{3}{2} \pi \frac{M_r}{n^r} > |b_m - B_m|$. Ist $|f(x)| < M$, so erhält man bei $2n+1$ äquidistanten Ordinaten $|T_n| < M(2,5 + \ln n)$, bei $2n$ äquidistanten Ordinaten $|T_n| < M \left(2 + \frac{2}{\pi} \ln n \right)$. Für die weiteren Ableitungen erweist sich der Satz als wichtig: Ist $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ ($f(x)$ und $g(x)$ mit der Periode 2π , $T_n(x)$ und $U_n(x)$ trigonometrische Interpolationspolynome mit $2n+1$ bzw. $2n$ Ordinaten), so gilt die Abschätzung $|T_n(x) - U_n(x)| < \varepsilon(A + B \ln n)$. (Bei ungerader Ordinatenzahl kann man nehmen $A = 2,5$, $B = 1$, bei gerader Ordinatenzahl $A = 2$, $B = 2/\pi$). Ist $|f^{(r)}(x)| \leq M_r$, so folgt $|f - T_n| < M_r n^{-r} (A + B \ln n)^2$; besitzt $f^{(r)}(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega_r(\delta)$, so ergibt sich $|f - T_n| < \omega_r \left(\frac{\pi}{n} \right) n^{-r} (A + B \ln n)^2$ (die Konstanten A und B sind für gerade und ungerade Ordinatenanzahl verschieden!). Ist $|f^{(r)}(x)| \leq M_r$, so folgen die Beziehungen $|T_n^{(r)}(x)| < M_r (A + B \ln n)$; $|f^{(r)} - T_n^{(r)}| < M_r (A + B \ln n)$; ist $|f'(x)| < M_1$, so folgt $|f - T_n| < M n^{-1} (A + B \ln n)$. Hat $f(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$, so folgt $|f - T_n| < \omega \left(\frac{\pi}{n} \right) (A + B \ln n)$. Ist $f(x)$ im Periodenintervall von beschränkter Schwankung, so konvergiert $T_n(x)$ mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Ist $|f^{(r)}(x)| \leq M_r$, und verschwindet $f(x)$ in den Punkten $x_\alpha = \alpha \cdot h$, so folgt $|f| \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\frac{h}{2} \right)^r M_r$. Ist $|f^{(r)}(x)| \leq M_r$, so ergibt sich $|f - T_n| < \sqrt{\frac{2}{r}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^r \frac{M_r}{n^r} (A + B \ln n)$. Besitzt $f^{(r)}(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega_r(\delta)$, so folgt $|f^{(r)} - T_n^{(r)}| < \omega_r \left(\frac{\pi}{n} \right) (A + B \ln n)$; $|f - T_n| < \sqrt{\frac{2}{r}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^r \frac{\omega_r \left(\frac{\pi}{n} \right)}{n^r} (A + B \ln n)$.

F. Knoll (Wien).

Reihen:

Constantinescu, G. G.: Über das Raabesche und Bertrandsche Konvergenzkriterium. Gaz. mat. 46, 293—299 (1941) [Rumänisch].

Einige Anwendungen der L'Hôpitalschen Regel auf Konvergenzkriterien, wenn die Glieder u_n einer Reihe die Werte für $x = 1, 2, \dots$ einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ sind.

T. Popoviciu (București).

Lancaster, Otis E.: Sequences defined by non-linear algebraic difference equations. Ann. of Math., II. s. 42, 251—280 (1941).

Ist $\Phi(S_{n+m}, \dots, S_n, n) = 0$ eine nichtlineare, algebraische Differenzengleichung m -ter Ordnung, so wird unter der Differenzengleichung der linearen Glieder die lineare Differenzengleichung verstanden, die man erhält, wenn man aus $\Phi = 0$ die Glieder zweiten und höheren Grades in S_{n+i} wegläßt; man hat aber nötigenfalls lineare Glieder in S_{n+i} mit den Koeffizienten Null einzuführen, so daß formal eine Differenzengleichung m -ter Ordnung entsteht. Durch eine algebraische Differenzengleichung wird eine unendliche Anzahl von Folgen definiert, über deren Verhalten, wenn $n \rightarrow +\infty$, die folgenden Sätze bewiesen werden. Eine nichtlineare algebraische Differenzengleichung enthalte als Koeffizienten eines linearen Gliedes ein Polynom höheren Grades, als solche bei den Koeffizienten der nichtlinearen Glieder auftreten; gibt es dann Lösungen der Differenzengleichung der linearen Glieder, die mit $n \rightarrow +\infty$ gegen 0 gehen, und hat die charakteristische Gleichung der linearen Differenzengleichung endliche, von Null verschiedene Wurzeln, deren absoluter Betrag von 1 verschieden ist, dann gibt es für die gegebene Differenzengleichung Folgen, die mit $n \rightarrow +\infty$ gegen 0 gehen, gehen alle Lösungen der Differenzengleichung der linearen Glieder mit $n \rightarrow +\infty$ gegen 0, dann gehen auch Folgen der Differenzengleichung mit $n \rightarrow +\infty$ gegen 0. Eine algebraische Differenzengleichung, deren Glieder mindestens vom ersten Grade in S_{n+i} sind, definiert Folgen, die mit $n \rightarrow +\infty$ gegen 0 gehen, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differenzengleichung der linearen Glieder dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind. Ist α eine algebraische Zahl, dann gibt es algebraische Differenzengleichungen, die Folgen definieren, die gegen α konvergieren. Von der Klasse nichtlinearer Differenzengleichungen von der Form

$$(A) \quad \Phi(S_{n+m}, \dots, S_n, n) + a_m(n)S_{n+m} + a_{m-1}(n)S_{n+m-1} + \dots + a_0(n)S_n = \theta(n),$$

wo Φ ein festes Polynom bedeutet, dessen Glieder in S_{n+i} mindestens vom zweiten Grade sind, und die Funktionen $a_i(n)$, $i = 0, 1, \dots, m$, und $\theta(n)$ Polynome in n sind, von denen $a_m(n)$ fest und $\neq 0$, alle anderen beliebig sind, ist die einzige, die die raschest nach 0 konvergierende Folgen ergibt (bei in einer genügend kleinen Umgebung des Ursprungs gewählten Anfangsbedingungen), diejenige, für die $a_0 \equiv a_1 \equiv \dots \equiv a_{m-1} \equiv 0$, $\theta \equiv 0$ ist. Für eine vorgegebene natürliche Zahl k und eine algebraische Zahl α lassen sich algebraische Differenzengleichungen m -ter Ordnung finden, die Folgen bestimmen, welche α mit der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit k approximieren. — Die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit r rationaler Folgen, die durch eine Differenzengleichung erster Ordnung, deren Koeffizienten Polynome in n sind, bestimmt werden, kann nicht die Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit rationaler Folgen übersteigen, die durch irgendeine Differenzengleichung erster Ordnung gleichen Grades, aber mit konstanten Koeffizienten definiert werden, sofern $r \geq 2$ ist. Es gibt algebraische Differenzengleichungen von höherer als erster Ordnung, die rationale Folgen definieren, die mit einer größeren Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit bestimmte algebraische Zahlen annähern, als sie bei Folgen auftritt, die durch Differenzengleichungen erster Ordnung gleichen Grades bestimmt werden. Von allen Differenzengleichungen zweiten Grades, die gegen $\beta^{1/2}$ (β rational) konvergieren, ist die raschest konvergierende von der ersten Ordnung. Es gibt eine Differenzengleichung erster Ordnung kp -ten Grades, die Folgen bestimmt, welche gegen $\beta^{1/p}$ mit der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit $2k$ konvergieren (β rational, $\beta^{1/p}$ irrational für $i = 1, 2, \dots, p-1$); aber keine derartige Differenzengleichung kann mit einer größeren Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit gegen $\beta^{1/p}$ konvergieren. Es gibt eine Differenzengleichung erster Ordnung vom Grade $kp+1$, die gegen $\beta^{1/p}$ konvergierende Folgen bestimmt, deren Konvergenz schneller erfolgt als die Konvergenz der Folgen einer Differenzengleichung erster Ordnung des Grades q , wo $(k+1)p > q > kp+1$ ist. Es gibt eine Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

deren Folgen rascher gegen $\beta^{1/p}$ konvergieren als die Folgen einer gleichartigen Differenzengleichung, deren Koeffizienten Polynome in n sind. Wenn eine Folge die reelle Zahl $\beta^{1/p}$ in der Ordnung der Konvergenzgeschwindigkeit k approximiert (wenn also $|S_n - \beta^{1/p}| = \varepsilon$ ist, dann existiert eine von ε unabhängige Zahl C , so daß $|S_{n+1} - \beta^{1/p}| \leq C \cdot \varepsilon^k$ ist) und wenn $2C \cdot \varepsilon^k < \varepsilon$ und die ersten i Dezimalstellen zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge die gleichen sind ($i > 0$), dann kann das zweite der Glieder von $\beta^{1/p}$ um nicht mehr als $2^k C \cdot 10^{-k \cdot i}$ abweichen; ist $C < 10^j$, so ist dieses Glied genau bis auf $ki - j - k/3$ Dezimalen. Ist $\beta^{1/p} > 0$, so konvergieren die durch (B) $S_{n+1} = (p-1)S_n p^{-1} + \beta p^{-1} S_n^{1-p}$ definierten Folgen für alle positiven Ausgangswerte S_0 gegen $\beta^{1/p}$; die Konvergenz ist sogar monoton, wenn die Ausgangswerte $> \beta^{1/p}$ sind. Eine Folge von Teilsummen einer Binomialreihe kann gegen $\beta^{1/p}$ nicht mit der Ordnung 2 der Konvergenzgeschwindigkeit gehen. Es gibt aber durch (B) definierte Folgen, die rascher gegen $\beta^{1/p}$ gehen als die Teilsummen einer Binomialreihe.

F. Knoll (Wien).

Schwatt, I. J.: An application of the bracketed number to the summation of a certain type of series. J. Math. pures appl., IX. s. 20, 23—34 (1941).

Seien n, h, v, g ganze Zahlen > 0 . Betrachten wir die Summe $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cos k \frac{\pi}{g}$

und nehmen wir an, daß in ihr die ersten h Glieder beibehalten und die folgenden v weggestrichen werden, dann die folgenden h Glieder beibehalten und die nächsten v weggestrichen werden und so fort. M. a. W. betrachten wir die Summe:

$$S = S(n, h, v; g) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha (h+v) \sum_{k=1}^h (-1)^{k-1} \cos[k + \alpha(h+v)] \frac{\pi}{g} \\ + (-1)^m (h+v) \sum_{k=1}^{\min(h, d)} (-1)^{k-1} \cos[k + m(h+v)] \frac{\pi}{g}$$

wo $n = m(h+v) + d$, $0 \leq d < h+v$. Verf. nimmt $g = 6$ an und erhält für diesen Sonderfall von g durch naheliegende Verfahren — ganz abgesehen von der evidenten Langwierigkeit der Berechnung bei einem so erkünstelten Problem — einige Formeln zur Berechnung von S . Weitere Formeln werden auf elementare Weise durch die Anwendung der bekannten Funktion $[x]$ gefunden. Unzählige Druckfehler und eine Anzahl nicht gebräuchlicher Ausdrücke machen die Arbeit schwer lesbar.

L. Cesari (Pisa).

Grünwald, Géza: Über die Summabilität der Fourierschen Reihe. Acta Sci. Math. Szeged 10, 55—63 (1941).

Es sei $F(x, y)$ eine L -integrierbare, in bezug auf x und y periodische Funktion der Periode 2π ; seien $s_{mn}(x, y)$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, die Teilsummen ihrer Fourierschen Doppelreihe. Verf. beweist, daß fast überall im Quadrat $0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{00} + s_{11} + s_{22} + \dots + s_{nn})/n + 1 = F(x, y)$$

ist. Der Beweis stützt sich auf Verfahren, die schon von J. Marcinkiewicz und A. Zygmund [Fundam. Math. 32, 122—132 (1939); dies. Zbl. 22, 18] angewandt wurden und insbesondere auf eine genauere Bestimmung des Vitalischen Überdeckungssatzes (vgl. das genannte Referat).

L. Cesari (Pisa).

Spezielle Funktionen:

Brixy, Eduard: Zur Berechnung der Funktionen $\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)}$ und $\lg \left[\frac{J_{\nu+1}(x)}{J_\nu(x)} \right]$. Z. angew. Math. Mech. 20, 359—361 (1940).

Einfache Umformungen der vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 22, 334) aufgestellten Potenzreihe für die mittels der Besselschen Funktion $J_\nu(x)$ gebildete Funktion $J_{\nu+1}(x)/\nu! J_\nu(x)$ zwecks numerischer Berechnungen.

O. Borůvka (Brünn).

Barbanti, Alberto: Dei polinomi di Appell generalizzati e di una loro importante proprietà. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. **76**, 89—96 (1939).

Die Folge der Appellschen Polynome (vom Rang 0) $A_{n,0}(x)$ bestimmt sich durch das Gleichungssystem (1) $A'_{n,0}(x) - nA_{n-1,0}(x) = 0$; es ist also

$$(2) \quad A_{n,0}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \binom{n}{i} x^{n-i}$$

mit beliebigen Konstanten a_i , und es gilt die wichtige Identität

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} y^{-n-1} A_{n,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (y-x)^{-(n+1)} a_n.$$

Pincherle hat die Appellschen Polynome vom Rang m $A_{n,m}(x)$ durch das Gleichungssystem

$$(1') \quad \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} \binom{n}{i} i! A_{n-i,m}^{(m-i+1)}(x) = 0, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

definiert. Seine Lösung lautet

$$(2') \quad A_{n,m}(x) = \sum_{i=0}^{n+m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \binom{n}{i-k} \binom{n-i+k-1}{k} k! a_{m(i-k)+i} x^{n-i+m},$$

worin, wie üblich, $\binom{n}{j} = 0$ für $j < 0$ zu setzen ist. Die Verallgemeinerung von (3) lautet

$$(3') \quad \sum_{n=0}^{\infty} y^{-n-1} A_{n,m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^i \binom{m}{i} \frac{i!}{k!} x^{m+k-i} \frac{d^k}{dy^k} \{(y-x)^{-n-1} a_{(m+1)n+i}\}.$$

Dies beweist Verf. durch vollständige Induktion. Die zahlreichen sinnstörenden Druckfehler hat Ref. in obigen Formeln zu beseitigen versucht. *Harald Geppert.*

Meijer, C. S.: Neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. 1. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 81—92 (1941).

Verf. beginnt seine Arbeit mit einer Schrifttumsliste von 27 Stellen. Für die Funktion $G_{p,q}^{m,n} \left(w \left| \begin{smallmatrix} a_1 \dots a_p \\ b_1 \dots b_q \end{smallmatrix} \right. \right)$, welche durch folgende Gleichung definiert wird:

$$G_{p,q}^{m,n} = \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_j) \prod_{j=1}^p \Gamma(a_j - b_h)} w^{b_h} \cdot {}_pF_{q-1},$$

beweist er die Integralformel:

$$G_{p,q}^{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} w^s ds.$$

Der Integrationsweg L läuft von $-\infty i + \lambda$ nach $\infty i + \lambda$ (λ bel. reelle Zahl) so, daß die Punkte $b_j, b_j + 1, b_j + 2, \dots$ ($j = 1, \dots, n$) auf der rechten, die Punkte $a_j - 1, a_j - 2, \dots$ ($j = 1, \dots, m$) auf der linken Seite von L liegen. Beim Beweis werden fünf verschiedene Fälle in bezug auf die Voraussetzungen über die Parameter und Veränderliche der genannten Funktion unterschieden. Für drei verschiedene Sätze von Voraussetzungen beweist Verf. sodann eine weitere Integralformel, welche aus

M. J. O. Strutt.

Meijer, C. S.: Neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 186—194 (1941).

Verf. verwendet in der vorliegenden Arbeit die von ihm abgeleiteten Integralformeln (vgl. vorstehendes Referat) zur Berechnung einer Reihe von bestimmten Integralen. Hierzu beweist er 10 neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen

mit Hilfe von Integranden, welche die in der ersten Mitteilung behandelte Funktion G enthalten. Hierauf gibt Verf. eine Zusammenstellung von Funktionen, welche als Spezialfälle der genannten Funktion G betrachtet werden können. Es sind dies u. a. die Besselschen Funktionen, Hankelschen, Lommelschen, Struveschen Funktionen, sowie Produkte dieser Funktionen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Meijer, C. S.: Neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. 3. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 298—307 (1941).

Als Fortsetzung der in der ersten Mitteilung dieser Reihe abgeleiteten Integralformeln gibt Verf. durch Spezialisierung der dort behandelten Funktionen G eine weitere Reihe von Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen. Er zeigt zunächst, daß einige bekannte Integraldarstellungen dieser Funktionen als Sonderfälle der von ihm abgeleiteten Integralformeln betrachtet werden können. Sodann zeigt er, daß einige von ihm früher abgeleitete Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen in einfacher Weise als Sonderfälle der Integralformeln der ersten Mitteilung erhalten werden können. Im Verlauf der Mitteilung werden noch einige weitere neue Integraldarstellungen für Whittakersche Funktionen angegeben, wobei die Integranden Hankelsche, Lommelsche und Struvesche Funktionen enthalten.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Abramowitz, Milton: Note on the computation of the differences of the $Si(x)$, $Ci(x)$, $Ei(x)$ and $-Ei(-x)$ functions. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 332—333 (1940).

Die zweite Differenz $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ der Funktion $f(x) = Ei(x) - \log_e x$ wird für $0 < x < 0,1$, $h = 0,0001$ mittels des Polynomes $h^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} + \frac{x^3}{5 \cdot 3!} \right)$ auf 12 Dezimalstellen approximiert, und ähnliche Resultate gelten für die übrigen in der Überschrift erwähnten Funktionen.

O. Borůvka (Brünn).

Krygowsky, Zdislas: Sur les intégrales hyperelliptiques canoniques de seconde espèce. Bull. Sci. math., II. s. 64, 216—225 (1940).

Verf. gibt eine neue Herleitung der Koeffizienten der hyperelliptischen kanonischen Integrale 2. Art ξ_1, ξ_2 , die Weber in Crelles J. 82 behandelt hat. Dabei gelangt Verf. zu der Determinante $\Delta = -\frac{2^2 \pi^2}{3 \gamma_5^2}$; hierbei ist γ_5 ein Koeffizient des Polynoms

$$R(x) = \gamma_5 x^5 + \gamma_4 x^4 + \gamma_3 x^3 + \gamma_2 x^2 + x = x(1-x)(1-k_1^2 x)(1-k_2^2 x)(1-k_3^2 x).$$

Auf gleiche Weise gelangt Verf. zu zwei weiteren hyperelliptischen Integralen η_1, η_2 , deren Periodenparallelogramme gegenüber denen von ξ_1, ξ_2 permutiert sind. Schließlich zeigt Verf., daß der Aufbau aller Formeln durch die Weierstrasssche Schreibweise symmetrischer wird.

Kropp (Waldsiedersdorf).

Maass, Hans: Modulformen und quadratische Formen über dem quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$. Math. Ann. 118, 65—84 (1941).

Nachdem Verf. Gruppen G von n simultanen, linear gebrochenen Substitutionen S in n Veränderlichen aufgestellt und zugehörige automorphe Formen der Dimension $-r$ in Gestalt von verallgemeinerten Poincaréreihen zu einem Multiplikatorsystem $v(S)$ konstruiert hat (dies. Zbl. 23, 223, 224), erhebt sich die Frage nach den möglichen Multiplikatorsystemen zu G und r . Hier greift Verf. den Fall der Hilbertschen Modulgruppe M zum quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$ heraus, weil für M die Erzeugenden und definierenden Relationen bekannt sind. Diese werden auch für die durch $\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod{2}$ oder $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}$ definierte Untergruppe T von M berechnet, und es zeigt sich, daß für $G = M$ für r nur ganzzahlige Werte zulässig sind und M mit ihrer Kommutatorgruppe übereinstimmt. Für $G = T$ tritt daher nur das Multiplikatorsystem $v(S) = 1$ auf, während für $G = T$ auch halbzahlige Werte von r möglich sind und vier Multiplikatorsysteme angegeben werden können. — Weiter werden für $r \leq 4$ Abschätzungen der ersten Koeffizienten der Fourierentwicklung einer automorphen Form gegeben, wodurch numerisch entschieden werden kann, wann eine Form identisch verschwindet. Verf. erhält daraus Identitäten zwischen den normierten

Eisensteinreihen $G_r(\tau)$ und den Thetareihen $\vartheta(\tau, \mathfrak{D}_m)$, die mit positiv-definiten, geraden quadratischen Formen in m Veränderlichen von der Determinante $(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}))^{2r}$ gebildet sind. Die $\vartheta(\tau, \mathfrak{D}_m)$ sind automorphe Formen zu M von der Dimension $-r = -\frac{m}{2}$, und daher ist $m \equiv 0 \pmod{4}$. Genauer gilt $\vartheta(\tau, \mathfrak{D}_4) = G_2(\tau)$, $\vartheta(\tau, \mathfrak{D}_8) = G_4(\tau)$, $(G_2(\tau))^2 = G_4(\tau)$. — Nach Zuordnung von Gittern zu den Klassen äquivalenter gerader quadratischer Formen der angegebenen Determinante zeigt Verf. durch Konfigurationsbetrachtungen, die den in der Theorie Liescher Ringe benutzten ähneln, daß es für $m = 4$ oder 8 über $R(\sqrt{5})$ nur die Formenklassen \mathfrak{D}_4 , $\mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_4$ und $\mathfrak{D}_8 \neq \mathfrak{D}_4 + \mathfrak{D}_4$ gibt.

E. Schulenberg (Berlin).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

Tóth, F.: Eine neue Annäherungsmethode für gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung und eine neue Abschätzung der erreichten Genauigkeit. Mat. fiz. Lap. 48, 176—190 u. dtsh. Zusammenfassung 191—192 (1941) [Ungarisch].

Es sei $y(x)$ eine Lösung von $y' = f(x, y)$. Für eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $Y(x) \neq y(x)$ und $v(x) = y(x) - Y(x)$ ist dann

$$v'(x) = \frac{f(x, y) - f(x, Y)}{y - Y} v(x) + f(x, Y) - Y'.$$

Aus dieser linearen Differentialgleichung für $v(x)$ ergibt sich

$$v(x) = \varepsilon^*(x) \left\{ v(x_0) + \int_{x_0}^x [f(x, Y(x)) - Y'(x)] \frac{dx}{\varepsilon^*(x)} \right\},$$

wo

$$\varepsilon^*(x) = \exp \int_{x_0}^x \frac{f(x, y(x)) - f(x, Y(x))}{y(x) - Y(x)} dx$$

ist. Hierauf gründet Verf. den Iterationsansatz

$$Y_{k+1}(x) = Y_k(x) + \varepsilon_k(x) \int_{x_0}^x [f(x, Y_k(x)) - Y'_k(x)] \frac{dx}{\varepsilon_k(x)}$$

mit

$$\varepsilon_k(x) = \exp \int_{x_0}^x f_{Y_k}(x, Y_k(x)) dx.$$

Für die Konvergenz des Verfahrens wird vorausgesetzt, daß $f(x, y)$, $f_y(x, y)$ in einem durch Perronsche Unter- und Oberfunktionen begrenzten Gebiet stetig und beschränkt, sowie f_y eine monotone Funktion von y ist; als erste Näherungsfunktion ist eine Unter- oder Oberfunktion zu wählen, je nachdem f_y monoton zu- oder abnimmt. (Referat nach deutschem Auszug.)

Kamke (Tübingen).

Lahaye, Edm.: Les itérations intégrales convergentes. Application aux équations différentielles du premier ordre algébriques en y et $\frac{dy}{dx}$. Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mém., 18, Fasc. 5, 1—65 (1939).

Ausführliche Darstellung der in C. R. Acad. Sci., Paris 210, 621—624 (1940) angekündigten Ergebnisse (siehe dies. Zbl. 23, 316).

Kamke (Tübingen).

Picone, Mauro: Nuova analisi esistenziale e quantitativa delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 10, 13—36 (1941).

Vorgelegt ist das gewöhnliche Differentialsystem in Normalform

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad (2) \quad y(x_0) = \alpha,$$

wobei x in einem endlichen oder unendlichen offenen Intervall A liegt, y und α zwei Vektoren mit je p Komponenten und λ ein Vektor mit q Komponenten sind. Verf. gibt hinreichende Bedingungen für die Existenz einer totalstetigen Funktion $y(x)$ im Inneren von A an, die (2) und fast überall in A die Gleichung (1) befriedigt, ohne daß

dabei die Bedingung der Beschränktheit von A oder der Stetigkeit von f bezüglich λ benutzt wird. — $u(x)$ sei im Innern von A absolut stetig. Es wird angenommen, daß für $|y - u(x)| \leq b$, $|z - u(x)| \leq b$, $|\lambda - \lambda^{(0)}| \leq c$, wobei b und c positiv endlich sind, die Ungleichungen gelten

$$|f(x, y, \lambda) - f(x, u(x), \lambda^{(0)})| \leq P(x, b, \lambda)|y - u(x)| + Q(x, b, \lambda),$$

$$|f(x, y, \lambda) - f(x, z, \lambda)| \leq R(x, b, \lambda)|y - z|,$$

in denen P, Q, R nicht negativ und bezüglich x im Innern von A summierbar sind; ferner sei $Q(x, b, \lambda^{(0)}) \equiv 0$ und $f(x, y, \lambda)$ eine bezüglich x in A meßbare und $f(x, u(x), \lambda^{(0)})$ eine im Innern von A summierbare Funktion. Verf. beweist dann folgendes: Es werden ein Punkt x_0 in A sowie zwei Vektoren α und λ vorgegeben, die die Ungleichungen $|\alpha - u(x_0)| < b$, $|\lambda - \lambda^{(0)}| \leq c$ erfüllen; ist dann I eine Umgebung von x_0 , für deren Punkte x die Ungleichung

$$\omega(x) \equiv \left\{ |\alpha - u(x_0)| + \int_{x_0}^x \left[\left| \frac{du}{dt} - f(t, u(t), \lambda^{(0)}) \right| + Q(t, b, \lambda) \right] dt \right\} e^{\int_{x_0}^x P(t, b, \lambda) dt} < b$$

gilt, so gibt es eine und nur eine Lösung des Systems (1), (2), die der Ungleichung $|y(x) - u(x)| < b$ genügt, und es ist überdies $|y(x) - u(x)| \leq \omega(x)$. Dabei bedeutet

$|y - u|$ die Summe $\sum_{\kappa=1}^p |y_{\kappa} - u_{\kappa}|$, falls $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_p)$, $u \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$

gesetzt wird. Der Satz erfordert nicht die Annahme, daß $u(x)$ eine Lösung des Systems (1), (2) sei, und der Beweis erfolgt nach dem klassischen Verfahren der schrittweisen Annäherung (bezüglich der Anwendung dieses Verfahrens auch unter allgemeineren Voraussetzungen als bei Carathéodory, vgl. H. Okamura, dies. Zbl. 3, 207). Fernerhin gibt Verf. in seiner Arbeit hinreichende Bedingungen dafür an, daß die Lösung des Systems (1), (2) im gesamten Intervall A und bei beliebiger Vorgabe des Punktes x_0 existiert, wenn nur der Anfangsvektor α und der Parameter λ auf geeignete Bereiche beschränkt werden.

Giovanni Sansone (Firenze).

Giuliano, Landolino: Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 330—336 (1940).

In Fortführung einer vorangehenden Untersuchung (dies. Zbl. 23, 120) erweitert Verf. einen Satz von Tonelli und erhält mit bemerkenswerter Einfachheit ein Vergleichskriterium; dieses bezieht sich auf die Differenz $|y_{\nu}(x) - Y_{\nu}(x)|$ zweier Lösungen $(y_1(x), \dots, y_n(x))$, $(Y_1(x), \dots, Y_n(x))$ des Differentialsystems

$$y'_{\nu} = f_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n), \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

die durch die beiden Punkte $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$, $(\xi, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$ gehen, unter der Voraussetzung, daß die f_{ν} Ungleichungen der Form

$$(y_{\nu} - Y_{\nu}) \{f_{\nu}(x, y_1, \dots, y_n) - f_{\nu}(x, Y_1, \dots, Y_n)\} \leq \text{Max}_{\nu=1, \dots, n} |y_{\nu} - Y_{\nu}| \varphi(x, \text{Max}_{\nu=1, \dots, n} |y_{\nu} - Y_{\nu}|)$$

$$(\nu = 1, \dots, n)$$

erfüllen, in denen $\varphi(x, u)$ eine reelle stetige, geeigneten Bedingungen unterworfenen Funktion bezeichnet. Die vom Verf. erhaltenen Abschätzungen haben die typische Form $|y_{\nu}(x) - Y_{\nu}(x)| \leq u_0(x)$, in der $u_0(x)$ das obere Integral der Differentialgleichung $u' = \varphi(x, u)$ ist, das durch den Punkt $(\xi, u = \text{Max}_{\nu=1, \dots, n} |\eta_{\nu} - \bar{\eta}_{\nu}|)$ geht.

Giovanni Sansone (Firenze).

Zaremba, Stanislas Christian: Sur une question relative aux intégrales premières des systèmes d'équations différentielles. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 411—426 (1940).

Es handelt sich um das System

$$(1) \quad x'(t) = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z'(t) = Z(x, y, z)$$

und die mit diesem zusammenhängende partielle Differentialgleichung

$$(2) \quad X \frac{\partial \omega}{\partial x} + Y \frac{\partial \omega}{\partial y} + Z \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

Es wird ein Beispiel folgender Art konstruiert: X, Y, Z sind in einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit stetigen partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung versehen, haben an keiner Stelle alle drei den Wert 0, unter den Lösungen von (1) befinden sich geschlossene Kurven, (2) hat zwei unabhängige Integrale. *Kamke (Tübingen).*

Artemiev, N.: Über realisierbare Bewegungen. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 351—366 u. dtsh. Zusammenfassung 366—367 [Russisch].

Artemieff, N.: Über realisierbare Trajektorien. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 429—446 u. dtsh. Zusammenfassung 446—448 [Russisch].

Artemieff, N.: Die Bestimmung der Realisierbarkeit der periodischen Bewegungen. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 127—155 u. dtsh. Zusammenfassung 155—158 (1941) [Russisch].

Die realisierbaren Bewegungen im Sinne des Verf. stimmen mit den gewöhnlich stabil genannten Lösungen von Differentialgleichungssystemen überein: Neben dem System

$$(1) \quad x'_p(t) = X_p(t, x_1, \dots, x_n) \quad (p = 1, \dots, n)$$

wird ein System

$$(2) \quad y'_p(t) = X_p(t, y_1, \dots, y_n) + \varepsilon Y_p(t, y_1, \dots, y_n) \quad (p = 1, \dots, n)$$

betrachtet. Es sei $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ eine für alle $t \geq 0$ existierende Lösung von (1); diese Lösung nennt Verf. realisierbar [in bezug auf die durch (2) bestimmten Umgebungskurven], wenn es zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon(\delta) > 0$ gibt, so daß jede Lösung $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$, für deren Anfangswerte

$$|\psi_p(0) - \varphi_p(0)| \leq \varepsilon \quad (p = 1, \dots, n)$$

gilt, ebenfalls für alle $t \geq 0$ existiert und die Ungleichungen

$$|\psi_p(t) - \varphi_p(t)| \leq \delta \quad (p = 1, \dots, n)$$

erfüllt. Es werden hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß die periodischen Lösungen gewisser Differentialgleichungssysteme in diesem Sinne realisierbar sind. Das wird angewendet zur Erklärung der Lücken in dem Asteroidenring und der Bewegung der Trojaner. [Referat nach deutschem Auszug.] *Kamke (Tübingen).*

Azevedo do Amaral, Ignacio M.: Über die Integration der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Ann. Acad. Brasil. Sci. 12, 191—196 (1940) [Portugiesisch].

Unter Anwendung der Laplaceschen Transformation werden mittels bestimmter Integrale partikuläre Lösungen linearer Differentialgleichungen angegeben. Es werden keine Gültigkeitsbedingungen gegeben. *L. Cesari (Pisa).*

O'Brien, Katharine E.: Some problems in interpolation by characteristic functions of linear differential systems of the fourth order. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 281—290 (1940).

Gegenstand der Arbeit ist die Frage der Konvergenz der Summen der Gestalt

$\sum_{v=0}^p \alpha_{vp} u_v(x)$, wo die $u_v(x)$ ($v = 0, 1, 2, \dots, p$) die ersten $p + 1$ Eigenfunktionen der

Differentialgleichung vierter Ordnung

$$u^{(IV)} - \{\varrho^4 + \lambda(x)\}u = 0$$

mit stetigem $\lambda(x)$ in Verbindung mit einer der sechs Randbedingungen $u'_0 = u'''_0 = u'_1 = u'''_1 + u_1 = 0$; $u'_0 = u'''_0 = u'_1 + u_1 = u'''_1 + u'_1 = 0$; $u_0 = u'_0 = u_1 = u'_1 + u'_1 = 0$; $u'_0 = u'''_0 = u_1 = u'_1 = 0$; $u'_0 = u'''_0 = u_1 = u'_1 = 0$ be-

deuten und $\alpha_{vp} = \left\{ \frac{1}{2} f(0) u_v(0) + \sum_{k=1}^p f(x_k) u_v(x_k) \right\} : \left\{ \frac{1}{2} u_v^2(0) + \sum_{k=1}^p u_v^2(x_k) \right\}$ mit $x_k = \frac{2k}{2p+1}$

gesetzt ist, gegen die Funktion $f(x)$. Für in $[0, 1]$ stetige Funktionen von beschränkter Schwankung werden mehrere derartige Konvergenz- bzw. Äquivalenzsätze ausge-

sprochen. Die von Jensen [Some problems in the theory of interpolation by Sturm-Liouville functions; Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 54—79 (1927)] übernommene Beweismethode für diese Sätze wird jedoch nur am Falle der Randbedingung $u_0 = u'_0 = u_1 = u'_1 = 0$ und für Funktionen $f(x)$, die einer Lipschitzbedingung genügen, auseinander-gesetzt. Schoblik (Brünn).

Bernstein, S.: Première note sur les opérateurs différentiels linéaires. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **29**, 532—535 (1940).

Bernstein, S.: Sur l'approximation d'une fonction continue par un opérateur linéaire différentiel d'un polynôme. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **5**, 15—41 u. franz. Zusammenfassung 41—42 (1941) [Russisch].

Anknüpfend an eine Fragestellung von S. Soboleff sucht Verf. die Bedingungen auf, unter welchen der mit stetigen Koeffizienten $\varphi_i(x)$ gebildete Differentialoperator

(1) $D_K\{y(x)\} = \sum_0^K \varphi_i(x) y^{(K-i)}(x)$ die Eigenschaft (kurz: Eigenschaft S) hat, daß jede

im Intervall (a, b) stetige Funktion $A(x)$ durch Ausdrücke der Form $D_K\{P(x)\}$, wo $P(x)$ ein Polynom ist, gleichmäßig approximiert werden kann. Der Operator (1) hat stets die Eigenschaft S in (a, b) , wenn $\varphi_0(x)$ in (a, b) nirgends verschwindet; dies ist mit Rücksicht darauf, daß die Differentialgleichung (2) $D_K\{y(x)\} = A(x)$ in diesem Falle eine samt den ersten K Ableitungen stetige Lösung hat, einfach einzusehen. Verf. studiert nun die nicht trivialen Fälle, wo der Operator (1) in (a, b) singuläre Stellen, d. h. Punkte, wo $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) \geq 0$ ausfällt, aufweist. Eine Lösung der Gleichung (2) wird in (a, b) regulär genannt, wenn sie samt den $K - 1$ ersten Ableitungen dort stetig ist, und wenn in jeder singulären Stelle x_0 gilt: $\sum_1^K \varphi_i(x_0) y^{(K-i)}(x_0) = A(x_0)$.

Der Operator (1) hat dann und nur dann die Eigenschaft S in (a, b) , wenn (2) für jede stetige Funktion $A(x)$ eine in (a, b) reguläre Lösung zuläßt (Theorem I); dies ist z. B. dann der Fall, wenn das Intervall nur eine einzige singuläre Stelle enthält (Theorem II). Wenn der Operator (1) in (a, b) nur zwei singuläre Stellen x_1 und x_2 , $x_1 < x_2$, aufweist, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß er nicht die Eigenschaft S hat, daß

$$\left| \int_{\xi}^{x_1} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)} dt \right| < +\infty, \quad \left| \int_{\xi}^{x_2} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_0(t)} dt \right| < +\infty, \quad x_1 < \xi < x_2$$

ist, und daß die Gleichung $D_K\{y(x)\} = 0$ $K - 1$ unabhängige reguläre Lösungen besitzt (Theorem III). — Bei zwei singulären Stellen kann dagegen stets jede stetige Funktion gleichmäßig durch Ausdrücke der Form $C(x - x_1)(x - x_2) + D_K\{P(x)\}$ (C ist eine Konstante, $P(x)$ ein Polynom) approximiert werden (Theorem IV). Es folgen noch weitere Charakterisierungen. Ein interessantes Musterbeispiel ist der Operator

$$D_1\{y(x)\} = y'(x) x^2 \sin \frac{1}{x} + y(x).$$

Die erste der im Titel angeführten Arbeiten bringt eine kurze Zusammenstellung der Ergebnisse ohne Beweise, während die zweite die ausführliche Darstellung enthält.

H. Hadwiger (Bern).

Trjitzinsky, W. J.: Developments in the analytic theory of algebraic differential equations. Acta math. **73**, 1—85 (1941).

Es handelt sich um gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung, die in y und seinen Ableitungen algebraisch, in x analytisch seien. Verf. fragt nach Entwicklungen in einem singulären Punkt, den er nach $x = \infty$ legt. Die Koeffizienten seien dort bis auf Pole regulär. Er macht den von den linearen Differentialgleichungen

gewohnten Ansatz $y(x) \sim S(x) = e^{Q(x)} x^r \sigma(x)$, wo $Q(x) = \sum_1^p q_i x^{\frac{i}{k}}$, r irrational, $\sigma(x) = \sum_0^\mu \sigma_i(x) \log x^i$, $\sigma_i(x) = \sigma_{i,0} + \sigma_{i,1} x^{-\frac{1}{k}} + \dots$; dann zerfällt die Differential-

gleichung in ihre homogenen Bestandteile. Verf. beschränkt sich also weiterhin auf homogene Polynome in y und seinen Ableitungen. — Nun betrachtet er „assozierte“ Differentialgleichungen, die der ursprünglichen für $x \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich sind, und die sich durch ein $S(x)$ lösen lassen. Er gibt in allen Fällen Gebiete an, innerhalb deren die Lösung der gegebenen Differentialgleichung asymptotisch gleich diesem $S(x)$ ist. Schließlich verallgemeinert er seine Ergebnisse auf den Fall, daß in der Differentialgleichung noch ein Parameter steht.

Ott-Heinrich Keller (Mürwik).

Molenaar, P. G.: Über die Differentialkovariante erster Ordnung der binären kubischen Differentialform. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 41—46 (1941).

Die früher vom Autor (dies. Zbl. 20, 340) aufgestellte lineare Differentialkovariante $l_s dx^s$ einer binären kubischen Differentialform $a_{ikl} dx^i dx^k dx^l$ wird auf anderem Wege wiedergefunden. Ihr expliziter Ausdruck heißt

$$l_s = Q^{ikl} \partial_l a_{iks} + a_{is} \partial_l a^{il},$$

wobei Q_{ikl} und a_{ik} die Koeffizienten der kubischen und biquadratischen Kovarianten der gegebenen Form sind, ∂_l die Differentiation nach x_l bedeutet, und das Hochziehen der Indizes durch

$$a^1 = -a_2, \quad a^2 = +a_1$$

definiert wird.

van der Waerden (Leipzig).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Dressel, F. G.: The fundamental solution of the parabolic equation. Duke math. J. 7, 186—203 (1940).

This paper discusses the parabolic equation

$$(1) \quad L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

under the assumptions that (I) $\frac{\partial}{\partial y} a_{i,j}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} a_{k,s}$, a_i and a ($a_{i,j} = a_{j,i}$; $i, j, k, s = 1, 2, \dots, n$) satisfy for $\eta \leq y \leq \eta'$ a Lipschitz condition of order γ where $0 < \gamma \leq 1$ in the closure of a bounded open region R and that (II) for these values of

x and y , $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j$ is a positive definite form. The author constructs, by a method similar to that of E. E. Levi [Rend. Circ. mat. Palermo 24, 257—317 (1907)] the fundamental solution $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ with the following properties: (a) For $y > \eta$ and for each pair of points x, ξ lying in R , the function $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ is a regular solution of (1); (b) If T is a subregion of R and $\varphi(x)$ is a function continuous in the closure \bar{R} , then

$$\lim_{y \rightarrow \eta} \int_T \varphi(\xi) \Gamma(x, y; \xi, \eta) d\xi = \begin{cases} \varphi(x) \\ 0 \end{cases}$$

if x is an interior point of $\begin{cases} T \\ R - T \end{cases}$.

T. Kitagawa (Hukuoka).

Michlin, S. G.: Problèmes aux limites fondamentaux de l'équation des ondes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 29, 281—285 (1940).

B sei ein von einer analytischen, komplexen, singularitätenfreien Kurve begrenztes Gebiet der x, y -Ebene. Verf. will die Integration der Differentialgleichung $U_{xx} + U_{yy} - U_{zz} = 0$ in dem Gebiete des x, y, z -Raumes leisten, für dessen Punkte $z \geq 0$ ist und die Projektion (x, y) nach B fällt. Vorgeschrieben sind die Anfangsbedingungen $U(x, y, 0) = F(x, y)$, $U_z(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, und außerdem sind auf der über dem Rand von B errichteten Halbzylinderfläche $z \geq 0$ die Werte von U oder der normalen Ableitung von U vorgegeben. Neu ist der Gedanke, U mittels Potentialen auszudrücken, die der Volterraschen Fundamentallösung der Wellengleichung entspringen; hiernach müßten nach Angabe des Verf. die behandelten Probleme sich in

Volterrasche Integralgleichungen übersetzen, deren Unbekannte die Dichtefunktion der genannten Potentiale ist. Abgesehen von einer wenig klaren Darstellung scheinen dem Ref. die für die eingeschlagene Methode grundlegenden Behauptungen nicht gerechtfertigt zu sein.

M. Picone (Roma).

Somigliana, Carlo: Funzioni trascendenti del campo gravitazionale ellissoidico. Atti Accad. Sci. Torino **75**, 597—611 (1940).

Wenn man das Geoid durch ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c ($a > b > c$) annähert, $x = (a^2 - b^2):a^2$, $y = (a^2 - c^2):a^2$ setzt und mit g_a, g_b, g_c die Werte der Gravitation in den Endpunkten der Achsen a, b, c bezeichnet, so hat man, nach einer Erweiterung des Satzes von Clairaut, die folgenden Beziehungen:

$$\frac{g_b}{b} - \frac{g_c}{c} = \omega^2 \Phi_a(x, y), \quad \frac{g_c}{c} - \frac{g_a}{a} = \omega^2 \Phi_b(x, y), \quad \frac{g_a}{a} - \frac{g_b}{b} = \omega^2 \Phi_c(x, y).$$

Darin ist ω die Drehgeschwindigkeit des Geoids um die kleinste Achse und Φ_a, Φ_b, Φ_c sind drei bestimmte Funktionen von x und y , die für $|x| < 1$ und $|y| < 1$ holomorph sind. Verf. beweist einige elegante Eigenschaften dieser Funktionen von automorphem Charakter und gibt die Glieder vom Grade 0, 1, 2 und 3 in ihren Mac-Laurinschen Reihenentwicklungen an. Die Rechnungen wurden in Zusammenarbeit mit dem „Istituto nazionale per le Applicazioni del Calcolo“ ausgeführt. Damit hat man mehr, als für die praktische Berechnung dieser Funktionen notwendig ist.

M. Picone.

Brelot, Marcel: Sur la théorie moderne du potentiel. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 828—830 (1939).

Kriterien für die Irregularität und Instabilität der Randpunkte einer Punktmenge in bezug auf die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems.

Rolf Nevanlinna.

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Fortet, Robert: Résolution d'un système d'équations de M. Schrödinger. J. Math. pures appl., IX. s. **19**, 83—105 (1940).

Man fragt nach einer nichtnegativen Lösung $h(x)$ der Gleichung

$$h(x) = \int_{J_1} g(x, y) \left[\int_{J_1} g(z, y) \omega_1(z) h^{-1}(z) dz \right]^{-1} \omega_2(y) dy,$$

wobei J_1, J_2 endliche oder unendliche Intervalle bedeuten, g eine stetige beschränkte nichtnegative Funktion ist und ω_1, ω_2 zwei stetige nichtnegative Funktionen sind, mit den weiteren Bedingungen, daß $\int_{J_1} \omega_1 dx = \int_{J_2} \omega_2 dy = 1$ und daß $g(x, y)$ für jeden festen

Wert von x in J_1 oder y in J_2 fast überall in J_2 bzw. J_1 positiv ist. Eine besondere Art von schrittweisen Annäherungen führt Verf. zum Schluß, daß eine Lösung $h(x)$ des genannten Typus immer existiert, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt ist: 1) $\int_{J_1} \omega_2(y) \left[\int_{J_1} g(z, y) \omega_1(z) dz \right]^{-1} dy < \infty$ (was z. B. schon aus den obigen

Bedingungen folgt, falls J_2 endlich ist); 2) für jedes endliche in J_1 enthaltene Intervall \mathfrak{J} und für jede stetige nichtnegative Funktion f , für die fast überall in irgendeiner offenen, \mathfrak{J} enthaltenden Menge $\int_{J_1} g(x, y) f(y) dy < \infty$ ist, konvergiert das letztgenannte

Integral gleichmäßig in bezug auf x in J_1 . Die Eindeutigkeit der Lösung wird außerdem bewiesen.

G. Cimmino (Bologna).

Lichnerowicz, André, et Raymond Marrot: Sur l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 531—533 (1940).

Carleman zeigte [Acta math. **60**, 91—146 (1933); dies. Zbl. **6**, 400], daß die Boltzmannsche Gleichung $\frac{dF}{dt} = T(F)$ eine einzige Lösung F besitzt, die für $t = 0$ in eine gegebene Funktion übergeht und überdies folgende Voraussetzungen erfüllt: a) F soll von den Raumkoordinaten unabhängig sein und von den Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ nur mittels $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ abhängen: $F = F(r, t)$.

b) $F(r, 0) = f_0(r)$ befriedigt eine Ungleichung der Gestalt $0 \leq f_0(r) < \frac{a}{(1+r)^\chi}$ ($\chi > 6$) für $0 \leq r < \infty$. Verf. zeigt, daß b) durch die Voraussetzung, daß das Integral $\int_0^\infty |F| r^\gamma dr$ ($\gamma > 5$) konvergiert, ersetzt werden kann. — Schließlich wird noch ein Weg skizziert, um gewisse Partikularlösungen zu bestimmen. *Maruhn* (Berlin).

Smirnof, N.: Sur l'application des séries de Fourier à la résolution des équations intégrales et intégrodifférentielles. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 413—426 u. franz. Zusammenfassung 427—428 [Russisch].

Gestützt auf das Haupttheorem der vorliegenden Arbeit, wonach aus $F_1(x) \prec L^2$, $F_2(x) \prec L^2$, $F_1 \star F_2 = \int_0^1 F_1(x - \xi) F_2(\xi) d\xi \prec L^2$ — L^2 bedeutet die Klasse aller quadratisch summierbaren Funktionen — und $F_1(x) = F_1(x+1)$ ($-1 \leq x \leq +1$) für die zugehörigen Transformierten $\mathfrak{F}_m(F) = \int_0^1 e^{-2\pi i m x} F(x) dx$ die Beziehung $\mathfrak{F}_m(F_1 \star F_2) = \mathfrak{F}_m(F_1) \cdot \mathfrak{F}_m(F_2)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) folgt, wird gezeigt, daß sich die Lösungen der Integral- bzw. Integrodifferentialgleichungen

$$f(x) = \int_0^1 K(|x - \xi|) u(\xi) d\xi, \quad u(x) = \lambda \int_0^1 K(|x - \xi|) u(\xi) d\xi + f(x),$$

$$f(x) + \sum_{k=0}^m A_k \frac{d^k u(x)}{dx^k} = \sum_{l=0}^n \int_0^1 K_l(|x - \xi|) \frac{d^l u(\xi)}{d\xi^l} d\xi$$

mit $K(x) = K(x+1)$ ($-1 \leq x \leq +1$) unter geeigneten Voraussetzungen in Gestalt Fourierscher Reihen mit leicht berechenbaren Koeffizienten darstellen lassen. Dieses Ergebnis wird abschließend noch etwas verallgemeinert. *Schoblik* (Brünn).

Koschliakov, N.: Application of Mellin's transformation to the deduction of some summation formulae. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 43—54 u. engl. Zusammenfassung 55—56 (1941) [Russisch].

L'au. donne une démonstration nouvelle des formules classiques de Plana-Abel-Cauchy et de Voronoi, en se basant sur la formule de Mellin. *N. Obreschkoff*.

Knopp, Konrad: Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. Math. Z. 47, 229—264 (1941).

Die zwischen den Cesàroschen und Hölderschen Mittelbildungen bestehenden eigentümlichen Zusammenhänge bildeten seit dem Beweise des Knopp-Schneeeschen Äquivalenzsatzes der beiden Summierungsverfahren in den Jahren 1907—1909 bis in die jüngste Gegenwart hinein den Gegenstand zahlreicher, methodisch teils recht unterschiedlicher Untersuchungen (vgl. das ausführliche Schriftenverzeichnis über diesen Gegenstand am Ende der Arbeit). In der vorliegenden Arbeit kehrt Verf. zu dem bereits in seiner Dissertation behandelten Problem zurück, um in einer diesem ganzen Ideenkreis gewidmeten historisch-kritischen Abhandlung den gemeinsamen inneren Kern aller verschiedenen Beweismethoden des Äquivalenzsatzes deutlich herauszuschälen, den Beweis selbst — sowohl für matriziale (gewöhnliche) C_k - und H_k -Verfahren (für Folgen) als auch für ihre analogen Integralmittelbildungen (für Funktionen) — einheitlich und in größter Allgemeinheit und dabei bis in alle Einzelheiten sorgfältig durchzuführen und endlich den Zusammenhang mit anderen eng verwandten Problemen herzustellen. — Für den Beweis, der im wesentlichen unter Beibehaltung des Schurschen Grundgedankens erfolgt, wird in einem vorbereitenden Abschnitt alles das mit Begründungen bereitgestellt, was für Folgen aus der Matrizenrechnung, für Funktionen aus einem entsprechend aufgestellten Formalismus für Integraltransformationen einer Klasse \mathfrak{B} benötigt wird. Die Klasse \mathfrak{B} der für die Limitierungsverfahren

belangvollen Matrixentransformationen $V(n; s_\nu) = \sum_{\nu=0}^\infty V_{n,\nu} s_\nu$ wird durch die folgenden

Forderungen gekennzeichnet: 1) die Zeilennormen sind vorhanden und beschränkt; 2) in den Spalten stehen lauter Nullfolgen; 3) die Zeilensummen konvergieren. Entsprechend wird unter den Integraltransformationen $V(x; s(t)) = \int_0^\infty V(x, t) s(t) dt$ eine

Klasse \mathfrak{B} in der folgenden Weise abgegrenzt. Die zugelassenen Funktionen $s(t)$ seien für $t > 0$ erklärt, für jedes $a > 0$ in $0 < t \leq a$ beschränkt und über $(0, a)$ absolut L -integrierbar; sie bilden die Klasse \mathfrak{S} mit der Teilklasse \mathfrak{S}_b derjenigen unter ihnen, die (jede für sich) beschränkt sind. Die „Vermittlungsfunktionen“ $V(x, t)$ seien im Quadranten $x > 0, t > 0$ erklärt und (flächenhaft) meßbar und erfüllen die drei den

obigen entsprechenden Bedingungen: 1) die Zeilennorm $\int_0^\infty |V(x, t)| dt$ ist für fast alle x vorhanden und gehört zu \mathfrak{S}_b ; 2) für festes $a > 0$ gilt $\int_0^a |V(x, t)| dt \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$);

3) die Zeilensumme $\int_0^\infty V(x, t) dt \rightarrow v(x \rightarrow +\infty)$. Durch Aufstellung der wichtigsten

Eigenschaften der zur Klasse \mathfrak{B} gehörigen Limitierungsverfahren wird zugleich für weitergehende Anwendungen eine breitere Grundlage geschaffen. — Der Beweis des Äquivalenzsatzes ergibt sich nach diesen Vorbereitungen sehr durchsichtig und in wenigen Schritten aus der Schurschen Identität $(p+1)MC_p - pMC_{p+1} = C_{p+1}$ ($\Re(p) > 0$), welche aus der Vertauschbarkeit von M und C_p gewonnen wird. Hierbei bedeutet M das Verfahren der gewöhnlichen arithmetischen Mittel und C_p dasjenige der Cesàroschen Mittel p -ter Ordnung. Mit der Bezeichnung N_p für die Vermittlungsfunktion $(p+1)t^p/x^{p+1}$ bzw. die Matrix $\binom{p+p}{p} \bigg/ \binom{n+p+1}{n}$ und E für die identische Transformation, wird die Transformation P_k , welche die C_k - in die H_k -Mittel überführt, und die hierzu inverse Q_k in der übersichtlichen Form

$$P_k = \frac{1}{k!} (E + M)(E + 2M) \cdots (E + (k-1)M); \quad Q_k = (kE - (k-1)N_{k-1}) \cdots (2E - N_1)$$

dargestellt. Da sie permanent sind, gilt die behauptete Äquivalenz. — Die inverse Beziehung dieser beiden Transformationen drückt sich bei Funktionen durch das reziproke Paar Volterrascher Integralgleichungen

$$f(x) + \frac{p}{x} \int_0^x f(t) dt = g(x); \quad g(x) - \frac{p}{x^{p+1}} \int_0^x t^p g(t) dt = f(x)$$

aus, deren jede durch die Neumannsche Reihe lösbar ist und so unmittelbar zu der anderen führt. Diesem Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen wird in einem besonderen Abschnitt, der den reversiblen und konvergenzgleichen Verfahren gewidmet ist, nachgegangen. Schließlich werden die Transformationen, welche die Cesàroschen und Hölderschen Mittel in die Abel-Laplaceschen oder A -Mittel überführen, explizit angegeben. Bedeutet R_k die Transformation, welche die C_k - in die A -Mittel überführt, $A = R_k C_k$, so liefert wegen $C_k = Q_k H_k$ die Beziehung $A = S_k H_k$ mit $S_k = R_k Q_k$ unmittelbar den Hölderschen Satz, sowohl für matriziale als auch für integrale Mittelbildungen.

Garten (Dessau).

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Šilov, G.: On the extension of maximal ideals. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 29, 83—84 (1940).

Ergänzungsbemerkungen zu einer Note von J. Gelfand über „normed rings“ (dies. Zbl. 21, 294).

Krull (Bonn).

Gelfand, I.: Normierte Ringe. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 3—23 (1941).

Ausführliche Darstellung der Ergebnisse, über die schon in einer früheren Note berichtet wurde (vgl. dies. Zbl. 21, 294). — Unter einem normierten Ring R wird ein

Ring mit Einselement e verstanden, in dem die Multiplikation mit komplexen Zahlen und eine Norm derart definiert sind, daß $\|e\| = 1$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$. Es wird noch vorausgesetzt, daß R kommutativ und, als metrischer Raum, vollständig ist. (Statt der Bedingung $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ dürfte man nur fordern, daß das Produkt xy stetig von den beiden Faktoren abhängt.) Ist J ein Ideal von R , so ist seine Abschließung auch ein Ideal. Ist J ein abgeschlossenes Ideal, so ist R/J auch ein normierter Ring; man hat nur die Norm der Restklasse X gleich $\inf_{x \in X} \|x\|$ zu setzen. — Durch Wohlord-

nung und transfinite Induktion läßt sich zeigen, daß jedes Ideal in einem maximalen Ideal M enthalten ist (M ist notwendig abgeschlossen). Ist M ein maximales Ideal, so ist R/M isomorph zum Körper der komplexen Zahlen; die Zahl, die derjenigen Restklasse entspricht, welche x enthält, sei mit $x(M)$ bezeichnet. Durchläuft M die Gesamtheit \mathfrak{M} aller maximalen Ideale von R , so erhält man eine Funktion $x(M)$ mit den folgenden Eigenschaften: a) Aus $x = x_1 + x_2$ folgt $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$; b) aus $x = x_1 x_2$ folgt $x(M) = x_1(M) x_2(M)$; c) wenn $x(M)$ für kein M verschwindet, dann gibt es ein $y \in R$ derart, daß $y(M) = 1/x(M)$. — Es wird gezeigt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ für jedes $x \in R$ existiert und gleich $\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ ist. Wenn $\sqrt[n]{\|x^n\|} \rightarrow 0$, dann heißt x ein verallgemeiner-

tes nilpotentes Element; der Durchschnitt aller maximalen Ideale ist genau die Menge der verallgemeinerten nilpotenten Elemente. — Es sei K ein System von Elementen aus R , die R erzeugen, d. h. daß der kleinste abgeschlossene Unterring, der K enthält, mit R zusammenfällt. Sind $\varepsilon > 0$ und endlich viele Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ beliebig vorgegeben, so definieren alle $M \in \mathfrak{M}$, für die

$$|x_i(M) - x_i(M_0)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

eine Umgebung von M_0 . Dieser Umgebungsbegriff erzeugt eine Topologie auf \mathfrak{M} , in bezug auf welche \mathfrak{M} bikompakt und Hausdorffsch und die Funktionen $x(M)$ alle stetig sind (diese letzten Eigenschaften bestimmen übrigens diese Topologie bis auf Homöomorphie). — Durch $x \rightarrow x(M)$ ist also R homomorph in einen Unterring U des Ringes $C(\mathfrak{M})$ aller auf dem bikompakten Hausdorffschen Raum \mathfrak{M} stetigen Funktionen abgebildet. Damit R sogar isomorph zu U sei, ist notwendig und hinreichend, daß R kein verallgemeinertes nilpotentes Element enthält. — Wenn es zu jedem $x \in R$ ein $y \in R$ derart gibt, daß $x(M) = y(M)$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$, dann ist U eine (im Sinne gleichmäßiger Konvergenz) überall dichte Untermenge von $C(\mathfrak{M})$. — Weiter wird gezeigt, daß \mathfrak{M} dann und nur dann nicht zusammenhängend ist, wenn R eine direkte Summe von Idealen mit Einheiten ist (dabei wird wieder vorausgesetzt, daß es zu jedem x ein y derart gibt, daß $x(M) = y(M)$). — Es wird auch die Frage untersucht, wann eine analytische Funktion der Ringelemente wieder zu R gehört. Ein hierzu gehöriges Resultat lautet wie folgt: Wenn $f(z)$ im Bereich der Werte der Funktion $x(M)$ regulär ist, dann existiert ein $y \in R$ so, daß $y(M) = f(x(M))$ für alle $M \in \mathfrak{M}$. — Die Resultate werden auch auf sog. reelle Ringe ausgedehnt. Ein normierter Ring R_r heißt reell, wenn in ihm nur die Multiplikation mit reellen (statt komplexen) Zahlen definiert ist, und wenn jedes Element der Form $x^2 + e$ ein Inverses besitzt. Es wird bewiesen, daß R_r/M (wo M ein maximales Ideal von R_r bedeutet) isomorph dem Körper aller reellen Zahlen ist. Die Funktionen $x(M)$ können also auch jetzt gebildet werden, aber sind sie alle reellwertig.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Gelfand, I., und G. Šilov: Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 25—38 (1941).

Die Menge \mathfrak{M} der maximalen Ideale eines normierten Ringes (siehe vorstehendes Referat) wird auf zwei Arten topologisiert. — Erste Topologie: Ein maximales Ideal M heißt Berührungspunkt der Untermenge $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$, wenn es den Durchschnitt aller maximalen Ideale enthält, die in \mathfrak{A} eingehen. Die Gesamtheit aller Berührungspunkte von \mathfrak{A} bildet die Abschließung von \mathfrak{A} . Im Falle Boolescher Ringe wurde eine Topologie

dieser Art schon von Stone betrachtet (dies. Zbl. 17, 135). In dieser Topologie ist \mathfrak{M} ein bikompakter T_1 -Raum, aber i. a. kein Hausdorffscher Raum. — Sei S ein vollständig regulärer Raum, $C(S)$ sei der normierte Ring aller auf S stetigen Funktionen. Die in einem festen Punkte $a \in S$ verschwindenden Funktionen bilden ein maximales Ideal M_a von $C(S)$; zu verschiedenen Punkten gehören verschiedene Ideale. Damit wird S in \mathfrak{M} abgebildet, und es wird bewiesen, daß diese Abbildung sogar homöomorph ist. Weiter wird bewiesen, daß in diesem Falle \mathfrak{M} ein Hausdorffscher Raum ist und daß das Bild von S überall dicht in \mathfrak{M} liegt. (Das Bild von S fällt dann und nur dann mit \mathfrak{M} zusammen, wenn auch S bikompakt ist.) \mathfrak{M} liefert also eine Hausdorffsche bikompakte Erweiterung von S , und zwar die größte in dem folgenden Sinne: Wenn Q ein bikompakter Hausdorffscher Raum ist, der S als eine überall dichte Untermenge enthält, dann ist Q stetiges Bild von \mathfrak{M} . — Die zweite Topologie ist diejenige, die in der vorstehend referierten Arbeit eingeführt wurde. Dann wird \mathfrak{M} ein bikompakter Hausdorffscher Raum; hier wird die Bikompaktheit neu bewiesen. — Sei $C(S)$ der Ring aller auf dem vollständig regulären Raum S definierten stetigen Funktionen. Einen abgeschlossenen Unterring $K \subset C(S)$ nennen Verff. vollständig regulär, wenn es für eine beliebig abgeschlossene Menge $F \subset S$ und einen Punkt a außerhalb F eine Funktion $x(t) \in K$ derart gibt, daß $x(a) = 0$ und $|x(t)| \geq \alpha > 0$ für $t \in F$. Wenn K ein solcher Unterring von $C(S)$ ist, dann liefert $\mathfrak{M}(K)$ eine Hausdorffsche bikompakte Erweiterung von S , in der S überall dicht ist; es können nur diejenigen Funktionen $x(t) \in C(S)$ auf $\mathfrak{M}(K)$ stetig fortgesetzt werden, die zu K gehören. So entsprechen die bikompakten Erweiterungen von S eineindeutig den vollständig regulären Unterringen von $C(S)$. — Diese Ergebnisse werden aus dem folgenden allgemeinen Satz hergeleitet: Es sei R ein normierter Ring mit der Eigenschaft, daß es zu jedem $x \in R$ ein $y \in R$ derart gibt, daß $x(M) = y(M)$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$. Ist \mathfrak{M} auf die zweite Weise topologisiert, so kann jede stetige Funktion auf \mathfrak{M} gleichmäßig beliebig genau durch Funktionen $x(M)$ ($x \in R$) approximiert werden. — Aus diesem Satz folgt leicht auch der folgende Satz von Stone (a. a. O.): Ist S ein bikompakter Hausdorffscher Raum und ist J ein abgeschlossenes Ideal von $C(S)$, so ist J die Gesamtheit aller Funktionen, die auf einer passenden abgeschlossenen Untermenge von S verschwinden.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Gelfand, I.: Ideale und primäre Ideale in normierten Ringen. Rec. math. Moscou, N. s. 9, 41—47 (1941).

Ein abgeschlossenes Ideal des normierten Ringes R heißt primär, wenn es nur in einem maximalen Ideal enthalten ist. Satz: Es sei $\{x_\alpha\}$ ein System von Erzeugenden des Ringes R . Es seien die Funktionen $x_\alpha(M)$ reellwertig. Sei ferner M_0 ein fixiertes maximales Ideal, und es möge für jedes x_α die Beziehung

$$\|(x_\alpha - \lambda e)^{-1}\| = o\left(\frac{1}{|\Im(\lambda - \lambda_\alpha^{(0)})|^{n_\alpha}}\right)$$

in einer Umgebung des Punktes $\lambda_\alpha^{(0)} = x_\alpha(M_0)$ erfüllt sein. Dann existiert unter den primären Idealen des Ringes R , die in M_0 enthalten sind, ein kleinstes. Dieses Ideal wird von den Elementen $(x_\alpha - \lambda_\alpha^{(0)} e)^{n_\alpha - 1}$ erzeugt. — Dieser Satz wird aus dem folgenden Satz gewonnen, der seinerseits mit Hilfe eines Phragmén-Lindelöfschen Satzes bewiesen wird. Ist x ein verallgemeinertes nilpotentes Element von R , für das

$$\|(e - \lambda x)^{-1}\| \leq \frac{cr^n}{\cos^n \varphi} \quad (\lambda = re^{i\varphi}) \text{ für alle genügend großen } r \text{ und alle } \varphi \neq \frac{\pi}{2} \text{ ist, so ist}$$

$x^{n+1} = 0$. — Verf. nennt einen normierten Ring R einen N -Ring, wenn jedes abgeschlossene Ideal von R der Durchschnitt maximaler Ideale ist. Satz: Es gebe in einem Ring R zu jedem x ein y derart, daß $x(M) = y(M)$. Es sei für jedes x , für das $x(M)$ reell ist und x^{-1} nicht existiert, die Beziehung

$$\|(x - \lambda e)^{-1}\| = o\left(\frac{1}{|\Im(\lambda)|^2}\right)$$

bei $\lambda \rightarrow 0$, $\Im(\lambda) \neq 0$, erfüllt. Dann ist R ein N -Ring. — Diese Ergebnisse werden insbesondere auf den Fall angewendet, wo R zwei Erzeugenden, x und x^{-1} , besitzt.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Gelfand, I.: Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 49—50 (1941).

Es sei ein kommutativer normierter Ring R und eine beschränkte Menge $G \subset R$ derart gegeben, daß G eine Gruppe bildet (als Operation in G dient die Operation der Multiplikation, die in R definiert ist). Es wird bewiesen, daß G genügend viele stetige Charaktere besitzt, d. h. daß es zu jedem Paar von Gruppenelementen einen stetigen Charakter gibt, der auf diesen Elementen verschiedene Werte annimmt. — Der Beweis stützt sich auf das folgende Lemma: Es sei $x = e - y$, wo y ein verallgemeinertes nilpotentes Element von R ist. Ferner sei $\|x^n\| \leq M$ für $n = 0, \pm 1, \dots$. Dann ist $y = 0$. — Dieses Lemma ist seinerseits eine Folgerung aus den Ergebnissen der vorstehend referierten Arbeit.

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Gelfand, I.: Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 51—66 (1941).

Ausführliche Darstellung der Ergebnisse, über die der Verf. schon früher berichtet hat (siehe dies. Zbl. **22**, 357).

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Dieudonné, Jean: Topologies faibles dans les espaces vectoriels. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 94—97 (1940).

Der Begriff des dualen Raumes von Köthe und Toeplitz [J. reine angew. Math. **171**, 193—226 (1934); dies. Zbl. **9**, 257] wird verallgemeinert, so daß er auf beliebige Banachräume anwendbar wird und neue Resultate in der Gleichungstheorie dieser Räume ergibt. E, E' seien Vektorräume über dem Körper der komplexen Zahlen. Es sei eine Bilinearform $B(x, x')$ für alle $x \in E, x' \in E'$ erklärt, so daß aus $B(x, x') = 0$ für alle x stets $x' = 0$ und aus $B(x, x') = 0$ für alle x' stets $x = 0$ folgt. Die Menge aller x in E , die für n Punkte x'_i der Ungleichung $|B(x, x'_i)| \leq 1$ genügen, bilden eine Umgebung der Null in E . In E wird so die schwache Topologie $\sigma(E, E')$ erklärt. Analog erklärt man in E' die schwache Topologie $\sigma(E', E)$. Jede im Sinn von $\sigma(E, E')$ stetige Linearfunktion in E ist eine Funktion $B(x, x'_0)$ mit festem x'_0 in E' , umgekehrt ist jede solche Funktion stetig in E . x heißt senkrecht auf x' , wenn $B(x, x') = 0$. Der Orthogonalraum M^* einer Menge M ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von E' , M^{**} ist der durch M erzeugte abgeschlossene Teilraum von E . Sei F, F' ein zweites Paar in schwacher Dualität bezüglich $C(y, y')$, u eine lineare Abbildung von E in F . u ist dann und nur dann stetig, wenn für jedes $y'_0 \in F'$ $C(u(x), y'_0)$ eine stetige Linearform in E ist. Es ist dann für ein $x'_0 \in E'$ $C(u(x), y'_0) = B(x, x'_0)$. Die Abbildung $x'_0 = u'(y'_0)$, die transponierte Abbildung zu u , bildet F' stetig in E' ab. Damit u' ein Homomorphismus von F' in E' ist, ist notwendig und hinreichend, daß $u(E)$ in F abgeschlossen ist. Die Gleichung $y_0 = u(x)$ ist für jedes $y_0 \in F$ dann und nur dann lösbar, wenn u' ein Isomorphismus von F' in E' ist. Ohne Beweise. *G. Köthe.*

Sierpiński, W.: Sur un espace métrique séparable universel. Atti Accad. Sci. Torino **75**, 575—577 (1940).

Un théorème des MM. Banach et Mazur affirme que tout espace métrique séparable est isométrique avec un sous-espace de l'espace (C) de toutes les fonctions continues dans l'intervalle fermé $[0, 1]$, où la distance est définie par $r(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ (voir S. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 187, Warszawa 1932; ce Zbl. **5**, 209). L'Auteur en donne une nouvelle démonstration sans faire usage de la théorie des fonctionnelles linéaires. Il se sert, en revanche, des courbes continues remplissant le cube à une infinité dénombrable de dimensions.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Price, G. Baley: On the completeness of a certain metric space with an application to Blaschke's selection theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 278—280 (1940).

Let K be a metric space with elements x, y, \dots and distance function $d(x, y)$.

Let K^* be the metric space whose elements X, Y, \dots are the closed, bounded, and non-zero subsets of K with the Hausdorff distance function

$$D(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \left[\inf_{y \in Y} d(x, y) \right], \sup_{y \in Y} \left[\inf_{x \in X} d(x, y) \right] \right\}.$$

It is shown that if K is complete, then K^* is complete too. The case when K is a Banach space is particularly treated and the following result is obtained: from any sequence of closed and convex subsets of a compact set of a Banach space it is possible to choose a subsequence which converges in the sense of the metric $D(X, Y)$. This is a generalisation to Banach spaces of a well-known theorem of Blaschke (see e. g. T. Bonnesen-W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, p. 34, Berlin 1934; this Zbl. 8, 77).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Neumark, M.: The deficiency-spaces of the direct product of symmetric operators. 1. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 265—274 u. engl. Zusammenfassung 274—278 [Russisch].

Let H_1 be a closed symmetric operator in the Hilbert space \mathfrak{H}_1 and H_2 a selfadjoint operator in the Hilbert space \mathfrak{H}_2 . Let further $E_1(\lambda)$, $F_1(\lambda)$ be the projections on the manifolds $\mathfrak{M}_1(\lambda)$, $\mathfrak{N}_1(\lambda)$ specified by $H_1^* f = \lambda f$ ($\Im(\lambda) > 0$), resp. $H_1^* f = \lambda f$ ($\Im(\lambda) < 0$), and let $E_2(\lambda)$ be the resolution of the identity corresponding to H_2 . Let H be the direct product $H_1 \times H_2$ operating in $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$. Let \mathfrak{M}_i and \mathfrak{N}_i be the manifolds of all characteristic vectors of H^* corresponding respectively to the characteristic values i and $-i$ (these are the deficiency-spaces of H). Theorem: If E_i and E_{-i} denote the projections on \mathfrak{M}_i , resp. \mathfrak{N}_i , then we have

$$E_i = \int_{-\infty}^{-0} F_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{\infty} E_1\left(\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

$$E_{-i} = \int_{-\infty}^{-0} E_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda) + \int_{+0}^{\infty} F_1\left(-\frac{i}{\lambda}\right) \times dE_2(\lambda),$$

the right-hand integrals being convergent in the strong topology for operators. — The Author has extended this result also to the direct product of two symmetric operators (see this Zbl. 24, 123).

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Yosida, Kôzaku, and Skizuo Kakutani: Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem. Ann. of Math., II. s. 42, 188—228 (1941).

Les problèmes relatifs aux chaînes de Markoff et au théorème ergodique sont exposés ici au point de vue de la théorie des itérations des opérations linéaires dans un espace fonctionnel. L'auteur montre, au dernier paragraphe, comment les résultats de la théorie générale permettent de résoudre un certain nombre de problèmes qui se présentent dans le cas d'une chaîne de Markoff où il n'y a qu'un nombre fini d'états possibles.

B. Hostinský (Brünn).

Kendall, M. G.: Conditions for uniqueness in the problem of moments. Ann. math. Statist. 11, 402—409 (1940).

Versuch einer systematischen Ableitung von bekannten und neuen, nur die absoluten bzw. gewöhnlichen Momente ν_n bzw. μ_n benützenden, hinreichenden Bedingungen zur eindeutigen Lösbarkeit des Momentenproblems (für das beiderseits oder nur nach rechts unendliche Intervall). Die Bedingungen: $\lim \sqrt[n]{\nu_n/n}$ oder $\lim \sqrt[n]{\mu_{2n}/n}$ endlich, ergeben sich noch als leichte und tadellose Folgerungen aus der — übrigens bekannten — hinreichenden Bedingung der Konvergenz von $\sum \frac{\nu_n}{n!} t^n$ für $t \neq 0$. Die Divergenzbedingung von $\sum 1/\sqrt[n]{\nu_n}$ sowie die anknüpfenden Betrachtungen sind aber bereits unannehmbar, da sie auf die falsche Ansicht gestützt werden, daß bei nichtwachsenden positiven a_n die Folge der $(na_n)^{-1}$ eine einzige Häufungsstelle besitzt bzw. bei der zusätzlichen Bedingung $na_n \rightarrow 0$ die Reihe der a_n konvergiert. v. Stachó.

Variationsrechnung:

Kantorovitch, L.: A new method of solving of some classes of extremal problems. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 28, 211—214 (1940).

Es bedeute A eine konvexe und schwachkompakte Teilmenge eines linearen normierten Raumes, F ein in A definiertes Funktional, das daselbst nach oben schwach halbstetig ist und sein Maximum auf dem Rand von A annimmt; ferner sei f ein beliebiges lineares Funktional, H_f die Gesamtheit der Punkte von A , in denen f sein Maximum für A annimmt, schließlich $p(f)$ das Maximum von F auf H_f ; dann gilt die Beziehung $\max F = \max p(f)$. Nach der Meinung des Verf. kann dieses Ergebnis für die tatsächliche Bestimmung des Maximums von F Dienste leisten, da es erlaubt, diese Aufgabe durch die Bestimmung des Maximums von $p(f)$ zu ersetzen, die in vielen Fällen einfacher gelingt. Dies wird an einigen Beispielen belegt. C. Miranda.

Damköhler, Wilhelm: Zur Frage der Äquivalenz indefiniter Variationsprobleme mit definiten. (Vorl. Mitt.) S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1940, 1—14 (H. 1).

Verf. beweist den Satz: Ist in dem beschränkten abgeschlossenen Bereiche B des x -Raumes ein positiv reguläres Variationsproblem $\int_c F(x_i, x'_i) dt$ vorgelegt, für welches auf der Gesamtheit aller geschlossenen rektifizierbaren Kurven c des Bereiches B

$$q(c) = \int_c F(x_i, x'_i) dt : \int_c \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'^2} dt \geq m > 0$$

gilt, so gibt es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein vollständiges Differential $\sum_{i=1}^n S_{x_i} x'_i$, welches für alle Richtungen x'_i die Ungleichung

$$F(x_i, x'_i) + \sum_{i=1}^n S_{x_i} x'_i \geq (m - \varepsilon) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i'^2}$$

in ganz B erfüllt. — Ein entsprechendes Resultat gilt beim Lagrangeschen Problem. S. Cinqini (Pavia).

McShane, E. J.: Necessary conditions in generalized-curve problems of the calculus of variations. Duke math. J. 7, 1—27 (1940).

In einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 23, 398) hat Verf. die Untersuchung der verallgemeinerten Kurven begonnen. Die vorliegende Abhandlung untersucht die notwendigen Bedingungen bei Bolzaschen Variationsproblemen bei Zugrundelegung verallgemeinerter Kurven; der daselbst bewiesene Hauptsatz besagt, daß unter gewissen Bedingungen, die in der Arbeit selbst nachgelesen werden müssen, eine verallgemeinerte Kurve, die ein starkes Minimum liefert, die Du-Bois-Reymondsche Bedingung, die Transversalitätsbedingung, die Weierstraßsche Bedingung in der ersten und zweiten Form und schließlich die Clebschsche Bedingung erfüllen muß. Auch diese Note hat, wie die vorhergehende, nur einführenden Charakter; aus den oben angeführten notwendigen Bedingungen leitet Verf. in ihr weiterhin analoge Bedingungen für Bolza-probleme ab, die sich auf Klassen gewöhnlicher Kurven beziehen. S. Cinqini.

McShane, E. J.: Existence theorems for Bolza problems in the calculus of variations. Duke math. J. 7, 28—61 (1940).

Auf Grund seiner Ergebnisse über verallgemeinerte Kurven (vgl. dies. Zbl. 23, 398 und die vorstehend besprochene Arbeit) stellt Verf. Existenzsätze für das Extremum bei Problemen vom Bolzaschen Typ, die sich auf gewöhnliche Kurvenklassen beziehen, auf. Betrachtet wird ein Funktional

$$J(C) = g(y(a), y(b)) + \int_a^b f(y(t), \dot{y}(t)) dt,$$

das für eine Kurvenklasse K : $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) definiert ist, die den Gleichungen $\varphi^\alpha(y, \dot{y}) = 0$ genügt. Es werden die folgenden Voraussetzungen als erfüllt angesehen:

1) Die Funktionen $f(y, r)$ und $\varphi^\alpha(y, r)$ ($\alpha = 1, \dots, m$; $m < v - 1$) seien für alle $y \equiv (y^1, \dots, y^v)$ einer abgeschlossenen Menge E und für alle $r \equiv (r^1, \dots, r^v)$ definiert und stetig und außerdem in den Variablen r positiv homogen vom Grade 1. Ist y_0 in E gelegen, und r_0 ein nicht verschwindender Vektor, und gilt weiterhin $\varphi^\alpha(y_0, r_0) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, m$), so seien überdies die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen $f(y, r)$ und $\varphi^\alpha(y, r)$ ($\alpha = 1, \dots, m$) für alle (y, r) , die zu (y_0, r_0) hinreichend benachbart sind, definiert und stetig. 2) Es sei y in E gelegen, $|r| \neq 0$ und $\varphi^\alpha(y, r) = 0$, dann ist die Matrix $(\varphi_{ri}^\alpha(y, r))$ ($\alpha = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, v$) vom Range m . 3) P sei eine abgeschlossene Punktmenge des $2v$ -dimensionalen Raumes, E sei eine abgeschlossene Punktmenge des Raumes der y . Betrachtet werde die Klasse K^* aller verallgemeinerten Kurven $C^*: [y(t), m[t; \Phi], M]$, die die Differentialgleichungen $\varphi^\alpha = 0$ erfüllen, deren Spuren (s. dies. Zbl. 23, 393) in E liegen und für die der Punkt $(y^1(a), \dots, y^v(b), y^1(b), \dots, y^v(b))$ in P liegt. 4) In K^* gebe es eine Minimalfolge $\{C_n^*\}$ für das Integral $\int_a^b m[t, f(y(t), r)] dt$,

bei der die Spuren aller Kurven C_n^* in eine beschränkte Menge fallen und die Längen aller dieser Kurven unterhalb einer von n unabhängigen, festen Zahl liegen. Es wird weiterhin ein Punkt y_0 aus E als gewöhnlich bezeichnet, wenn die Menge der Lösungen r der Gleichungen $\varphi^\alpha(y_0, r) = 0$ ($\alpha = 1, \dots, m$) konvex ist und auf ihr die Funktion $f(y_0, r)$ konvex ist bzw. anderen Bedingungen genügt, derentwegen wir auf die Originalarbeit selbst verweisen. Zu den Hauptsätzen der Arbeit zählt der folgende: Sind die Voraussetzungen 1), 2), 3), 4) erfüllt, ist jeder Punkt von E gewöhnlich und die Klasse K^* nicht leer, so enthält sie sicher eine gewöhnliche Kurve C_0 , die das Minimum von $J(C^*)$ in der Klasse K^* und daher erst recht in der Unterklasse K liefert. — Die Arbeit enthält noch weitere Sätze von größerer Allgemeinheit, deren Wiedergabe in einem Referat zu kompliziert wäre. Als Spezialfall werden aus den Ergebnissen Existenzsätze für freie, isoperimetrische und Mayersche Variationsprobleme abgeleitet. Die Beweise stützen sich auf die vom Verf. entwickelte Theorie der verallgemeinerten Kurven und andere Vorarbeiten des Verf. und des Ref. (vgl. dies. Zbl. 15, 28). Die Abhandlung beschließt ein Beispiel eines Variationsproblems, das drei Bedingungen, nämlich einer Differentialgleichung, einer endlichen Bedingung und einer isoperimetrischen Bedingung, unterworfen ist.

S. Cinquini (Pavia).

Mancill, Julian D.: On the Carathéodory condition for unilateral variations. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 363—366 (1940).

Verf. beschäftigt sich mit der Carathéodoryschen Bedingung für die Knickpunkte in der Formulierung von Graves [Amer. J. Math. 52, 13—19 (1930)]. Durch Betrachtung einseitiger Variationen beweist er den folgenden Satz: Es sei E_0 mit den Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(t)$, ($t_0 \leq t \leq T$; $\alpha = 1 \dots n$) eine Extremaloide, die die Punkte x_0 und X verbindet und das Integral $J = \int_{t_0}^T F(x, x') dt$ zum Minimum macht; sie genüge überdies den folgenden Bedingungen: 1) E_0 ist stark positiv; 2) mit der Bezeichnung $\Omega_0(x, p^-, p^+) = \frac{\partial F^+}{\partial x^\alpha} p^{\alpha-} - \frac{\partial F^-}{\partial x^\alpha} p^{\alpha+}$, worin $p^{\alpha-}$ und $p^{\alpha+}$ die Richtungskosinus der Tangenten an E_0 in den Knickpunkten bedeuten, sei in diesen Punkten $\Omega_0 \neq 0$; 3) E_0 ist durch jedes seiner Elemente (x, x') eindeutig bestimmt; 4) bedeutet $x^\alpha = \Phi^\alpha(t, a)$ eine von $n - 1$ Parametern abhängende Familie von Extremaloiden, die für $t_0 - \delta \leq t \leq T + \delta$ definiert sind, für $t = t_0$ durch den Punkt x_0 laufen und für $a^i = a_0^i$, $t_0 \leq t \leq T$ die Extremaloide E_0 enthalten, so soll auch die Determinante $D(t, a_0) \equiv \left| \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial a^i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{a=a_0}$ in den Knickpunkten von E_0 niemals verschwinden. Unter diesen Bedingungen wechselt die Determinante $D(t, a_0)$ in den Knickpunkten von E_0 beim Übergang zwischen den dort zusammenstoßenden Bögen ihr Zeichen nicht.

S. Cinquini (Pavia).

Kappos, A.: Die zweiparametrische Kurvenschar und die konjugierten Punkte eines Variationsproblems. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 33—56 (1940) [Griechisch].

Der Verf. behandelt das Variationsproblem für den Integranden

$$\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} + 2 \frac{x_2 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}.$$

Die Extremalscharen werden mit Hilfe der elliptischen Funktionen untersucht und überdies die konjugierten Punkte bestimmt (s. C. Carathéodory, Variationsrechnung, Kap. 13 [dies. Zbl. **11**, 356]).

Yannopoulos (Athen).

Radó, Tibor: On a lemma of McShane. Ann. of Math., II. s. **42**, 73—83 (1941).

L'A. dimostra la seguente proposizione che estende un lemma di McShane (questo Zbl. **8**, 72): Le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$; $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, ($n = 1, 2, \dots$) siano definite nel quadrato $Q \equiv [0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1]$ e soddisfino alle seguenti condizioni: I) le derivate parziali x_u, x_v, y_u, y_v esistono quasi-dappertutto in Q ; II) lo Jacobiano $J = x_u y_v - x_v y_u$ è integrabile in Q ; III) le funzioni $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$ sono quasi-lineari in Q ; IV) per $n \rightarrow \infty$, è $x_n(u, v) \rightarrow x(u, v)$, $y(u, v) \rightarrow y_n(u, v)$ uniformemente in Q . Sotto queste ipotesi esiste una successione di sotto insiemi misurabili V_n costituiti di punti di Q e tali che, per $n \rightarrow \infty$,

$$\iint_{V_n} J_n du dv \rightarrow \iint_Q J du dv,$$

ove $J_n = x_{nu} y_{nv} - x_{nv} y_{nu}$.

S. Cinquini (Pavia).

Giuliano, Landolino: Sulle condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 37—55 (1941).

L. Tonelli (Acta math. **53**, 325—346) a donné des conditions suffisantes pour la semicontinuité des intégrales

$$I_D[z] = \iint_D f(x, y, z, p, q) dx dy, \quad \left(\text{où } p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

lorsqu'on considère la classe des fonctions $z = z(x, y)$, avec $z(x, y)$ absolument continue et telle que $I_D[z]$ soit finie. Dans le travail en examen l'A., à base d'une extension aux intégrales $I_D[z]$ d'un procédé suivi par Tonelli (ce Zbl. **10**, 119) pour les intégrales curvilignes, remarque que les théorèmes établis par Tonelli pour les intégrales $I_D[z]$ dans l'hypothèse que les dérivées partielles f_{px}, f_{qy} soient finies et continues, gardent leur validité aussi dans le cas où cette hypothèse n'est pas satisfaite, à condition que l'intégrale $I_D[z]$ soit quasi-régulière semi-normale: l'A. appelle quasi-régulière positive semi-normale une intégrale $I_D[z]$, si en tout point (x, y) de D et pour toutes les valeurs finies de $z, p, q, \bar{p}, \bar{q}$ est $E(x, y, z; \bar{p}, \bar{q}; p, q) \geq 0$, et si pour chaque point (x, y, z) , avec (x, y) en D , il y a au moins deux nombres \bar{p}, \bar{q} de sorte que $E(x, y, z; \bar{p}, \bar{q}; p, q) > 0$ pour tout paire (p, q) différente de (\bar{p}, \bar{q}) . — Entre les résultats établis par l'A. nous citons la proposition suivante: Si $I_D[z]$ est une intégrale quasi-régulière positive semi-normale, et si il existe un nombre N de sorte que soit, pour tous les (x, y) de D et pour toutes les valeurs finies de $z, p, q, f(x, y, z, p, q) \geq N$, l'intégrale $I_D[z]$ est semicontinue inférieurement. — La démonstration de ce théorème fait usage d'une bien remarquable extension aux intégrales quasi-régulières semi-normales d'un cas particulier d'une proposition établie par le relateur (ce Zbl. **6**, 118) pour les intégrales quasi-régulières normales.

S. Cinquini (Pavia).

Amerio, Luigi: Studi su gli integrali doppi del calcolo delle variazioni. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **10**, 57—89 (1941).

On étudie, par la méthode de Tonelli, le problème de l'existence de l'extremum pour l'intégrale

$$I_D[z] = \iint_D F(x, y, z, p, q) dx dy, \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

dans la classe des fonctions $z = z(x, y)$, avec $z(x, y)$ absolument continue, au sens de

Tonelli, dans le domaine ouvert et borné D . — Dans le § 1 on étudie le cas particulier où les fonctions $z = z(x, y)$ de la classe considérée satisfont à une même condition de Lipschitz. — Dans le § 2 on démontre un théorème de semicontinuité inférieure de l'intégrale $I_D[z]$ dans une classe de fonctions absolument continues et intégrables en D . — Dans le § 3 l'A. déduit d'un théorème de Tonelli (ce Zbl. 6, 118) des propositions entre lesquelles nous citons la suivante: Soit $I_D[z]$ quasi-régulière positive et soient $\alpha > 0$, $\mu > 0$, M trois nombres de sorte qu'en chaque point (x, y) de D et pour tous les z, p, q soit vérifiée l'inégalité

$$F(x, y, z, p, q) > \mu\{|p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha}\} + M.$$

Dans ces hypothèses, si les fonctions $z(x, y)$ d'une classe C , complète à l'intérieur de D pour $I_D[z]$, sont également bornées et également continues à l'intérieur de D , il existe le minimum absolu de $I_D[z]$ dans la classe C . — Le Mémoire se conclut (§ 4) par un théorème d'existence de l'extremum absolu „en petit“. S. Cinqini (Pavia).

Morse, Marston, and C. Tompkins: Corrections to our paper on the existence of minimal surfaces of general critical types. Ann. of Math., II. s. 42, 331 (1941).

Bezieht sich — ohne das Referat zu berühren — auf die in dies. Zbl. 21, 34, 35 besprochene Arbeit. Harald Geppert (Berlin).

Funktionentheorie:

Gontcharoff, W. L., et M. K. Gontcharoff: Sur la représentation des fonctions analytiques par des séries des fonctions rationnelles d'un type spécial. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 30, 298—300 (1941).

Verff. betrachten Reihen von der Form $c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{z - a_{\mu}}{1 - a_{\mu}z}$ (1), worin die c_n beliebige komplexe Zahlen sind und die a_n eine reelle Folge bilden, welche nachstehende Eigenschaften besitzen soll: 1) $0 < a_n < a_{n+1} < 1$; $n = 1, 2, \dots$, 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ und 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ divergiert. Die Reihen (1) zeigen dann folgendes Konvergenzverhalten: Konvergiert eine Reihe (1) an einer Stelle $z = z_0$, die nicht in $\{a_n\}$, ($n = 1, 2, \dots$) vorkommt, so konvergiert sie für alle z , die der Bedingung $u(z) < u(z_0)$ genügen und nicht in der Folge $\{1/a_n\}$, ($n = 1, 2, \dots$) auftreten. $u(z)$ bedeutet den Realteil von $(z+1)/(z-1)$. — Konvergiert (1) an einer von den a_k verschiedenen Stelle z_0 absolut, so ist absolute Konvergenz auch an allen z -Stellen vorhanden, für welche $u(z) < u(z_0)$ und $z \neq 1/a_k$ ist. Außerdem ist die Konvergenz auf jeder abgeschlossenen Punktmenge aus $u(z) < u(z_0)$, die nicht die Punkte $1/a_k$ und 1 enthält, eine gleichmäßige. — Es gibt also einen Konvergenzkreis $u(z) = u_c$ ($-\infty \leq u_c \leq +\infty$) von der Beschaffenheit, daß (1) für $u(z) < u_c$ konvergiert und für $u(z) > u_c$ divergiert. Ebenso ist ein Kreis $u(z) = u_a$ ($-\infty \leq u_a \leq +\infty$) für absolute Konvergenz vorhanden. Es gilt $u_c - u_a \leq \mu$ mit $\mu = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \left[\log n \left(\sum_{m=0}^n (1 - a_m) \right)^{-1} \right]$ und $0 \leq \mu \leq \infty$. — Eine Reihe (1) stellt im Innern ihres Bereiches der absoluten Konvergenz eine meromorphe Funktion dar, welche nur in den Punkten $1/a_k$ Pole besitzt. Es werden weitere Eigenschaften derjenigen Funktionen aufgezeigt, welche man als Summen von Reihen (1) erhält, für die $u_a = +\infty$, $0 \leq u_a < +\infty$ und $u_a < 0$ ist. Ferner geben Verff. Klassen von Funktionen an, welche sich in Reihen (1) entwickeln lassen. Die Beweise fehlen. Lammel.

Fedoroff, W.: Sur les valeurs singulières d'une fonction analytique et continue sur l'ensemble partout discontinu de ses points singuliers. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 1939, 23—33 u. franz. Zusammenfassung 33—34 [Russisch].

Ist die Singularitätenmenge E einer eindeutigen analytischen Funktion $f(z)$ abgeschlossen und punkthaft (partout discontinu), so kennt man Funktionen $f(z)$, die in jedes ζ von E stetig fortgesetzt werden können; nach Pompeiu (Thèse 1905) und

Denjoy [C. R. Acad. Sci., Paris **148** (1909)] ist

$$f(z) = \int_E \frac{\varphi(\zeta) d\sigma}{z - \zeta}$$

von dieser Art, wenn das Integral im Sinne von Lebesgue verstanden wird, $d\sigma$ das Flächenelement und $\varphi(\zeta)$ die (beschränkte) Dichte einer Belegung von E bezeichnet; E soll mit jedem Kreise (c, ϱ) entweder keinen Punkt gemein haben oder einen Durchschnitt von positivem Flächenmaß $|E(c, \varrho)|$; Verf. nennt $c \in E$ einen Dichtpunkt von E (point d'épaisseur superficielle), wenn $\lim_{\varrho \rightarrow 0} |E(c, \varrho)| : \pi \varrho^2 = 1$ ist. — Die Arbeit ist der Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen gewidmet, welche eine auf E gegebene Funktion $f(\zeta)$ erfüllen muß, damit sie als Wertevorrat eines außer E analytischen, auf E noch stetigen $f(z)$ vom Pompeiu-Denjoyschen Typus verstanden werden kann, insbesondere bei gegebenem Typus von $\varphi(\zeta)$. Solche Bedingungen ergeben sich bei geeigneten $\varphi(\zeta)$ als

$$(f, \varphi) = 0, \quad 2(f, \varphi \zeta^{k+1}) = \sum_{\kappa=0}^k (\varphi, \zeta^\kappa) \cdot (\varphi, \zeta^{k-\kappa}) \quad \text{mit} \quad (h, g) = \int_E h(\zeta) g(\zeta) d\sigma$$

und $k = 0, 1, 2, \dots$. Ferner werden einige Differential- und Integralaussagen gewonnen: Ist c ein Dichtpunkt und

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varrho^2} \left| \int_{E(c, \varrho)} \varphi(\zeta) d\sigma \right| > 0,$$

so wird $\lim_{\zeta \rightarrow c} \left| \frac{f(\zeta) - f(c)}{(\zeta - c)^2} \right| = \infty$, während es bei Dichtfunktionen $\varphi(\zeta)$ mit

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varrho^2} \int_{E(c, \varrho)} \varphi(\zeta) d\sigma = 0 \quad \text{zu jedem ganzen } n > 0 \quad \lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{(t - c)^n} = 0$$

ein $f(z)$ gibt, das

für beliebige $t (= z \text{ oder } \zeta)$ zeigt. — Bei Annahme der Stetigkeit von φ im Punkte c ergeben sich weitergehende Aussagen; insbesondere wird dann der Rückschluß von f auf φ bis zu einer Rechenvorschrift geführt. — [Vgl. hierzu auch Fedoroff, dies. Zbl. **4**, 400 und Bull. Acad. Polonaise **1927**, 687—695, sowie Golubeff, C. R. Acad. Sci., Paris **158**, 1407—1480 (1914).] Ullrich (Gießen).

Tschebotarow, N. G.: Über fortsetzbare Polynome. 1. Allgemeine Problemstellung. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 268—282 (1940) [Russisch].

Soit $P(z) = 1 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polynome donné et soit M une région du plan des nombres complexes z . L'auteur pose le problème de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un polynome $1 + a_1 z + \dots + a_n z^n + b_1 z^{n+1} + \dots + b_p z^{n+p}$, qui a tous ses zéros dans M . Les cas, où M se confond avec l'axe réel, la circonférence $|z| = 1$, le demi-plan $R(z) \geq 0$ sont particulièrement traités et la résolution du problème posé est donnée pour le cas où M est confondue avec l'axe réel et $n = 2, 3$. N. Obreschkoff (Sofia).

Mejman, N. N.: Über fortsetzbare Polynome. 2. Über R-fortsetzbare Polynome. Gedenkwerk D. A. Gravé, Moskau 117—165 (1940) [Russisch].

L'auteur résout complètement le problème posé par Tschébotarow dans le travail précédent pour le cas où M se confond avec l'axe réel. La résolution dépend d'une certaine surface, appelée par l'auteur quasidiscriminante. N. Obreschkoff (Sofia).

Obreschkoff, Nikola: Sur les fonctions entières limites de polynomes dont les zéros sont réels et entrelacés. Rec. math. Moscou, N. s. **9**, 421—427 (1941).

Beweise zu Sätzen, welche Verf. bereits in einer früheren Note [C. R. Acad. Sci., Paris **206**, 1874—1876 (1938); vgl. dies. Zbl. **19**, 125] bekanntgegeben hat. Lammel.

Selberg, Atle: Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen. Arch. Math. og Naturvid. B **44**, Nr 4, 1—8 (1941).

Sei $f(z)$ eine ganzwertige ganze Funktion [d. h. $f(n)$ rational ganz für $n = 0, 1, 2, \dots$], $|f(z)| \leq M(r)$ für $|z| \leq r$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} M(r) \leq \alpha$. Nach Pólya und Hardy ist bekannt, daß $f(z) \equiv 2^z P(z) + Q(z)$, wenn $\alpha = \log 2$; $P(z)$, $Q(z)$ bedeuten rationale

Polynome. Verf. zeigt folgende Verschärfung dieses Satzes: Der Satz bleibt richtig, wenn für α der Wert $\log 2 + 1/1500$ genommen wird. Zum Beweis werden die Differenzenfolgen $a_n = \Delta^n f(n)$, $b_n = \Delta^{[n]} a_n$ betrachtet, wo $\Delta^1 f(z) = f(z) - f(z-1)$ gesetzt ist, und $\gamma = 4/907$. Die Aussage ist dann gleichbedeutend mit dem Verschwinden der ganzen Zahlen b_n für $n > n_0$. b_n wird durch ein Cauchysches Integral ausgedrückt, erstreckt über den Kreis $|z| = 2ne^{i\varphi}$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Dieser Kreis wird in zwei Teilbögen zerlegt, indem ein kleiner Bogen $-\delta < \varphi < \delta$ mit $0 < \delta < \pi$ und $\cos \delta = 900/907$ ausgesondert wird. Auf diesem Teilbogen wird das Integral mit Hilfe des Eulerschen Integrals erster Art abgeschätzt, auf dem anderen Bogen führt die Stirlingsche Formel zum Ziel. Aus diesen Abschätzungen folgt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, also $b_n = 0$ für $n > n_0$.
Pisot (Greifswald).

Gelfond, A.: On the coefficients of periodic functions. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. **5**, 95—98 u. engl. Zusammenfassung 98 (1941) [Russisch].

Eine periodische ganze Funktion von der Ordnung ϱ zeigt in ihrer Potenzreihe die Koeffizientendichte

$$\gamma = \overline{\lim} \frac{N(n)}{n} \geq \frac{1}{2\varrho},$$

wo $N(n)$ die Zahl der von Null verschiedenen Koeffizienten mit Zeigern $\leq n$ bedeutet.
Ulrich (Gießen).

Noshiro, Kiyoshi: On the singularities of analytic functions. Jap. J. Math. **17**, 37—96 (1940).

Die Arbeit hat drei recht selbständige Teile. Der erste gilt dem Fragenkreis, welcher durch Felix Iversen in seiner Thèse (Helsingfors 1914) erstmals tiefgreifend behandelt worden ist. Den Kern bilden auch hier die Sätze Iversens und seiner Nachfolger sie sind bisher meist nur für gebrochene Transzendenten (= meromorph für $|z| < \infty$) und deren Umkehrungen gefaßt. Jetzt prüft Verf. die Gültigkeit bei allgemeineren Funktionenklassen — ebenso bei eindeutigen Funktionen mit allgemeinerer Singularitätenmenge wie besonders bei mehrdeutigen Funktionen. Im Mittelpunkt steht dabei der Satz von Hurwitz-Iversen über die eindeutige Zuordnung von Zielwegen der Funktion und Randstellen der Riemannschen Fläche der Umkehrfunktion („transzendenten Singularitäten“). Die Zielwege brauchen jetzt nicht mehr in einem Randpunkt des Existenzgebiets zu „münden“; sie können allgemeinere Arten der Konvergenz gegen den Rand zeigen (Beispiele dafür sind seit Jahren bekannt). Nähere Prüfung erfährt ferner der Satz von Iversen-Valiron über die Fortsetzbarkeit jedes Funktionszweiges bis in jede Umgebung jeder vorgegebenen Stelle, sowie die Aussagen über die Struktur der Näherung an Zielwerte im Zusammenhang mit Wertvorratseigenschaften. Hierbei trennt Verf. verschieden starke Anforderungen an die Näherung: Er spricht von W -, L -, I -Eigenschaft (Weierstraß, Lindelöf, Iversen), wenn der gesamte Wertevorrat überall dicht ist, wenn der Wertevorrat eines Zweiges einem Ausnahmewert beliebig nahe kommt, wenn Fortsetzbarkeit jedes Zweiges bis in beliebige Nähe jeder Stelle vorliegt; I folgt aus $W + L$; Verf. fragt nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen von W bzw. L , muß aber die Frage nach einigen Bemerkungen offen lassen. — Für Funktionen ohne transzendente Singularität ist die Anzahl der a -Stellen fest, unabhängig von a , und nur bei algebraischen Funktionen endlich. — Der zweite Teil behandelt die gegenseitigen Beziehungen näher, welche für verschiedene Begriffe von „Häufungsmengen“ einer analytischen Funktion bestehen, sobald z in \mathfrak{D} einem Randpunkt ζ des Existenzgebietes \mathfrak{D} zustrebt; \mathfrak{C} sei der Rand von \mathfrak{D} . Es werden hervorgehoben: $S_\zeta^{(1)}$ und $R_\zeta^{(2)}$ als Menge der Häufungswerte bzw. Menge der Werte, in der Nähe eines Randpunktes schlechthin; $S_{\zeta, \mathfrak{Q}}^{(2)}$ als Menge der Häufungswerte bei Annäherung an einen durch den Weg \mathfrak{Q} erfaßten erreichbaren Randpunkt über ζ , und unter Beschränkung auf die durch \mathfrak{Q} bestimmten ε -Nachbarschaften; $S_\zeta^{(3)} = \prod M_r$, $M_r = \sum_{0 < |\zeta - \zeta'| < r} S_{\zeta'}^{(2)}$, wo ζ' alle Randpunkte (schlecht-

hin) nahe bei ζ durchläuft. Verf. gibt einen neuen, kürzeren Beweis, sowie verschiedene Deutungen und Anwendungen des Satzes von Beurling-Kunugui, welcher (z, ζ, ζ' wie oben)

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| = \overline{\lim}_{\zeta' \rightarrow \zeta} \left(\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta'} |f(z)| \right)$$

besagt, oder in anderer Fassung: Der Rand von $S_{\zeta}^{(2)}$ wird vom Rande $S_{\zeta}^{(3)}$ umschlossen. — In einem nachträglich angefügten Anhang (dritter Teil) wird mit den Methoden von Ahlfors' Theorie der Überlagerungsflächen die Umgebung einer transzendenten Singularität (Randstelle) für die Umkehrung einer gebrochenen Transzendenten bis zur Aufstellung einer Defektrelation behandelt. — Das Studium der Arbeit wird durch wenig glückliche Abweichungen von üblichen Bezeichnungen erschwert. Der Verf. erreicht nicht überall die im Schrifttum schon vorliegende Klärung und übersieht offensichtlich benutzte Schriften. Der Ref. konnte sich nicht durchweg überzeugen lassen.

Ullrich (Gießen).

Kunugui, Kinjiro: Sur un problème de M. A. Beurling. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 361—366 (1940).

Es handelt sich um die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine meromorphe Funktion $f(z)$ in jeder Umgebung eines Randpunkts ζ ihres Existenzgebiets \mathfrak{D} „alle“ Werte — bis auf zwei — annimmt. Verf. widerlegt durch ein (algebroides) Beispiel eine Vermutung Beurlings, und zeigt dann, daß es bei nicht isoliertem Randpunkt ζ eines beliebigen \mathfrak{D} darauf ankommt, „alle“ durch eine jener Mengen Ω_n von Werten zu ersetzen, in welche die Menge $S_{\zeta}^{(2)} - S_{\zeta}^{(3)}$ zerfällt (vgl. vorstehendes Referat). — Daraus fließen mehrere Verschärfungen, z. B. des Phragmén-Lindelöfschen Satzes.

Ullrich (Gießen).

Hällström, Gunnar af: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. Acta Acad. Åboens. 12, Nr 8, 1—100 (1940):

Um die Wertverteilungslehre auf Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten \mathfrak{G} auszudehnen, wird Ausschöpfung mittels der Niveaulinien typischer Potentialfunktionen in \mathfrak{G} benutzt; hat der Rand Γ von \mathfrak{G} positive Kapazität, so genügt es, die Greensche Funktion zu verwenden, welche nach Wahl des Anfangspunkts eindeutige Ausschöpfung sichert. Schwieriger liegt die Sache bei Gebieten mit Nullrand; ihnen gilt das Hauptaugenmerk; in diesem Falle hat Selberg (dies. Zbl. 17, 260) das Vorhandensein einer Funktionenklasse hervorgehoben, welche sich um einen Pol, z. B. $z = \infty$, $\sim -\log |z|$ verhält, bei Annäherung an Γ dagegen gleichmäßig gegen ∞ strebt; dabei handelt es sich aber um eine Funktionenklasse und nicht mehr eine bestimmte Einzelfunktion, und man erhält daher unendlich viele verschiedene Ausschöpfungstypen: Das bedingt, daß die bekannten Wertverteilungsgrößen nicht mehr von der untersuchten, in \mathfrak{G} meromorphen Funktion allein abhängen, sondern ebenso von der Konfiguration \mathfrak{G} selbst, wie auch von einer willkürlichen Gewichtsbelegung der einzelnen Randkomponenten. — Während der I. Hauptsatz im wesentlichen erhalten bleibt, erfährt der II. Hauptsatz durch diese Umstände einen eigentümlichen Zusatz im Restglied, dessen Stärke im Vergleich mit der erscheinenden Charakteristik T über die Natur der Defektrelation entscheidet, ähnlich wie der Ref. das bereits 1932 an der Verzweigtheit der Algebroiden gegenüber der z -Ebene aufgezeigt hat. — Als Sonderfälle werden eingehend behandelt: 1. Die Funktionen mit endlich vielen wesentlichen Punktsingularitäten. 2. Die Funktionen mit abzählbar vielen Punktsingularitäten s_n , welche nur eine Häufungsstelle zeigen: Sie entstehen insbesondere als meromorphe Funktionen von rationalen bzw. meromorphen Funktionen im klassischen Sinne; für diesen Sonderfall werden die Wertverteilungsgrößen genauer belegt und errechnet. Als Ausschöpfungsgrundlage dienen hier die Potentialfunktionen

$$\sum \mu_n \log \frac{1}{|z - s_n|}, \quad \sum_1^k \mu_n = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_1^{\infty} \mu_n = c \leq 1, \quad \mu_n > 0$$

(wofür noch gewisse Zusatzforderungen nötig und ausführlich klargelegt sind). Die Gewichte μ_n , welche den einzelnen Randpunkten s_n zugewiesen sind, verlagern natürlich mit der Struktur der Ausschöpfung auch die asymptotische Erscheinung des Wertverteilungsbilds. Diese Asymptotik wird in Zusammenhang gebracht mit der klassischen kreisförmigen Ausschöpfung der Ringumgebung einer isolierten wesentlichen Singularität. — Über diese beachtlichen Neuerungen hinaus enthält die Arbeit auch einiges Bemerkenswerte zur allgemeinen Wertverteilungslehre selbst: So wird die Behandlung der unendlichen Wachstumsordnung durch die vom Verf. hervorgehobene „Hyperordnung“ gefördert. Andererseits wird das Auftreten des Valirondefekts $\overline{\lim} m : T = 1$ bei gleichzeitiger algebraischer Verzweigkeit $\varepsilon = \overline{\lim} N_1 : T = 1$ an einem sehr einfachen kanonischen Produkt

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{2^{2^\nu}}\right)^2\right)^{2^{2^\nu}}$$

analytisch gezeigt, nachdem der Ref. u. a. auf dem 9. Skand. Mathematikerkongreß in Helsinki (1938, bes. S. 189—193; dies. Zbl. 21, 238) eine geometrisch gekennzeichnete Beispielklasse für diese Erscheinung angegeben hatte. *Ullrich* (Gießen).

Hällström, Gunnar af: Zwei Beispiele ganzer Funktionen mit algebraischem Höchstindex einer Stellensorte. Math. Z. 47, 161—174 (1941).

Vgl. den Schluß des vorstehenden Referats. Die unendlichen Produkte

$$c(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \cos \frac{z}{\nu}, \quad s(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\sin \frac{z}{\nu} : \frac{z}{\nu}\right)$$

liefern neue analytisch erfaßte Beispiele für das Eintreten des Höchstwerts 1 am Index der algebraischen Verzweigkeit. Verf. gewinnt sie aus einer geometrischen Aufgabe (Einschreiben einer Folge von n -Eckszügen in einen Kreissektor der Öffnung $2z$). Die analytische Behandlung führt über zahlentheoretische Funktionen. Die Charakteristiken lassen sich nach oben (und unten) schätzen; da auch die Zahl der mehrfachen Nullstellen leicht übersehbar ist, ergibt sich die Defektrelation $\delta(\alpha) + \mu(0) = 1 + 1 = 2$. Auch die Gestalt der Riemannschen Flächen kann genau angegeben werden. *Ullrich*.

Milloux, H.: Sur une nouvelle extension d'une inégalité de M. R. Nevanlinna. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 197—210 (1940).

Es wird eine Klasse von Parallelaussagen zum II. Hauptsatz der Wertverteilungslehre gegeben, indem die Charakteristik $T(r, f)$ einer in \mathfrak{G} meromorphen Funktion bzw. einer gebrochenen Transzendenten abgeschätzt wird durch die Anzahlfunktionen von zwei (statt drei) Stellensorten von $f(z)$, während die Anzahlfunktion der dritten Sorte von $f(z)$ ersetzt ist durch diejenige der Nullstellen von $f' - a$ ($a \neq 0$) bzw. all-

gemeiner einer Linearverbindung $\psi = \sum_{\lambda=0}^l \alpha_\lambda f^{(\lambda)}(z)$; die α_λ können auch Funktionen von z sein, die in \mathfrak{G} regulär bleiben und $\alpha_0 - 1 \neq 0$, $\alpha_l \neq 0$ genügen. — In der Ungleichung für T , welche dem II. Hauptsatz entspricht, erscheinen jedoch die Anzahlfunktionen der 2 Sorten von $f(z)$ mit Zahlkoeffizienten belastet, welche von l abhängen.

Ullrich (Gießen).

Paatero, V.: Über beschränkte Funktionen, welche gegebene Paare von Randbogen ineinander überführen. Math. Z. 47, 175—186 (1941).

Der Wertevorrat einer in $|z| < 1$ beschränkten Funktion $w = f(z)$, $|w| < 1$ gehöre auf 3 Randbogen $(z_1 z_2)$, $(z_3 z_4)$, $(z_5 z_6)$ drei gegebenen Bogen von $|w| = 1$ an. Für die Existenz von Funktionen, welche diese Vorschriften erfüllen, können — in Erweiterung früherer Ergebnisse des Verf. (vgl. dies. Zbl. 14, 407; 17, 173) und des Löwnerschen Lemmas — notwendige und hinreichende Bedingungen in Gestalt von Ungleichungen zwischen den Doppelverhältnissen aus den Endpunkten je zweier z - und w -Bogen gegeben werden. Im Grenzfall der Gleichheit ist die lösende Funktion

eindeutig bestimmt und linear. Bei Ungleichheit gibt es unendlich viele Lösungen, darunter unendlich viele rationale Funktionen zweiten bzw. dritten Grades. *Ulrich.*

Bruijn, N. G. de: Ein Satz über schlichte Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 47—49 (1941).

Die Ungleichungen $|a_n| \leq n$ und genauer für passendes ϑ

$$|a_{n+2}e^{(n+2)i\vartheta} - a_n e^{ni\vartheta}| \leq 2|a_1|, \text{ also } |a_n| \leq n|a_1|, \quad (a_0 = 0)$$

werden für eine neue Klasse schlichter Abbildungen bewiesen; nämlich für diejenige, wo das Bildgebiet \mathfrak{G} mit jeder Geraden durch einen beliebigen Punkt a (auch $\neq 0$, ja nicht einmal in \mathfrak{G}), oder parallel zu einer festen Richtung nur eine Strecke gemein hat. — Der Beweis wird auf die Konstruktion einer Hilfsfunktion mit positivem Realteil und die bekannten Eigenschaften dieser Funktionenklasse gestützt. *Ulrich.*

Wolff, J.: Théorème sur l'itération d'une représentation conforme. (2. comm.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 195—197 (1941).

Verf. zeigt, daß die Aussage der 1. Mitteilung (vgl. auch wegen der Bezeichnungen dies. Zbl. 23, 405) schon gilt, wenn für den Rand \mathfrak{R} nur $\arg z \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ (ohne Monotonie zu $|z|$) gefordert wird. — Ferner wird bewiesen: Enthält \mathfrak{R} ein Gebiet Δ mit $z = 1, \infty$ als Randpunkten, so ist $\lambda > 0$, und \mathfrak{R} enthält ein Gebiet \mathfrak{G} der Öffnung π im Unendlichen. *Ulrich* (Gießen).

Wolff, J.: Sur l'itération d'une représentation conforme. (3. comm.) Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 44, 308—309 (1941).

Bilde $z_1(z)$ die rechte Halbebene \mathfrak{D}_0 auf ein unendliches Teilgebiet $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_0$ ab, dessen Jordanrand in beiden Richtungen $\arg z_1 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ zeige; sei $z_1(1) = 1$ und die Winkelableitung von $z_1(z)$ im Unendlichen gleich $\lambda > 0$. Verf. zeigte, daß die Iterationen $z_n(z)$ auf Gebiete \mathfrak{D}_n führen, deren Kern \mathfrak{R} ein Gebiet \mathfrak{G} der Öffnung π im Unendlichen enthält (1. und 2. Mitt. vgl. dies. Zbl. 23, 405; vgl. vorsteh. Referat). — In der vorliegenden Note wird die Abbildung von \mathfrak{G} in \mathfrak{D} durch eine Folge von „Rückwärtsiterierten“ hergestellt: Ist α fest und z beliebig, beide in \mathfrak{G} , so leistet

$$\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z - \alpha}{|\alpha - \alpha|}$$

diese Abbildung.

Ulrich (Gießen).

Teichmüller, Oswald: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differential. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1940, 1—197.

Wichtige Beiträge zu der großen, mit Ausnahme gewisser einfacher Fälle (z. B. von algebraischen Kurven vom Geschlecht Eins) nur wenig untersuchten Frage nach der Zerlegung einer Menge von Riemannschen Mannigfaltigkeiten von einem gegebenen topologischen Typus in Klassen von konform äquivalenten Mannigfaltigkeiten. Der Verf. beschränkt die Untersuchung auf endliche, berandete oder nichtberandete Mannigfaltigkeiten, die mit Hilfe von endlichen Dreieckskomplexen dargestellt werden können. Zeichnet man auf einer solchen Mannigfaltigkeit eine endliche Anzahl von Innen- oder Randpunkten aus, so entsteht ein Gebilde, das vom Verf. als Hauptbereich bezeichnet wird. Die Klassen von konform äquivalenten Hauptbereichen, die topologisch gleichartig sind, bilden die Punkte eines Raumes \mathfrak{R} , und es handelt sich um die Untersuchung der topologisch-metrischen Struktur von \mathfrak{R} . Wenn \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 zwei Hauptbereiche sind, so liegt es nahe, die Entfernung der entsprechenden Punkte in \mathfrak{R} mit Hilfe von Abbildungen $\mathfrak{S}_1 \leftrightarrow \mathfrak{S}_2$ zu messen, welche möglichst wenig von einer konformen Abbildung abweichen. Sind gewisse einfache Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllt, in welchem Fall man die Abbildung (mit einer wenig zutreffenden Benennung) quasikonform bezeichnet, so läßt sich als Maß dieser Abweichung der Betrag des Dilationsquotienten D verwenden. $D \geq 1$ ist das Achsenverhältnis der Ellipse, auf welche ein infinitesimaler Kreis abgebildet wird, ein Begriff, der konform invariant

in bezug auf die betreffenden Ortsparameter erklärt ist. Eine extremale, quasikonforme Abbildung ist eine solche, für welche das Maximum von D möglichst klein wird. Ist dieses Minimum D_0 , so wird die Entfernung zwischen ξ_1 und ξ_2 durch $\log D_0$ erklärt. Von diesem Ansatz ausgehend stellt der Verf. zwei Hauptbehauptungen auf. Diese werden als Hypothesen gegeben, ohne strenge Beweise. Sie werden aber eingehend begründet durch eine Reihe von teilweise heuristischen, teilweise streng durchgeführten Betrachtungen.

Die Arbeit enthält eine Fülle von phantasievollen und scharfsinnigen Beobachtungen und Beweisansätzen, und man kann dem Verf. darin beistimmen, daß die Art, auf welche der Verf. seine wichtigsten Vermutungen und Ergebnisse begründet hat, geeignet ist, Beweisversuche anzuregen und ernsthafte Zweifel auszuschließen. Dieser mathematische Stil mahnt aber kaum zur Nachahmung. Wenn auch die Darstellung ausführlich und didaktisch verdienstvoll ist und der Verf. sich redlich bemüht hat, die zahlreichen Hypothesen, welche im Laufe der Untersuchung ausgesprochen und angenommen werden, klar zu formulieren und von der wirklichen Beweisführung zu trennen, so konnte es bei dieser Arbeitsweise nicht vermieden werden, daß aus dem Ganzen ein verwirrendes Gemisch geworden ist, und mancher Leser hätte sich wohl mit dem Ref. mehr gefreut über einen Zuschuß von strenger Beweisführung als über die Angabe der Stunde, in der diese oder jene Vermutung dem Verf. einfiel.

Eine erste wichtige Vermutung, zu welcher der Verf. nach einer Untersuchung von gewissen einfachen Sonderfällen kommt, ist diese: für die extremalen Abbildungen ist der Dilatationsquotient konstant. Weniger naheliegend ist die zweite Hauptvermutung, welche die Richtung derjenigen Linienelemente betrifft, in welcher die Dilatation ihr Maximum erreicht: Für eine geschlossene Mannigfaltigkeit wird dieses Richtungsfeld bestimmt durch die Bedingung, daß $d\zeta^2$ reell positiv ist, wo $d\zeta^2 = \varphi(dz)^2$ (dz ist ein Ortsparameter) ein quadratisches, überall endliches Differential ist. Der konstante Dilatationsquotient und das Richtungsfeld bestimmen zusammen die extremale Abbildung. Bei der nachfolgenden, eingehenden Diskussion werden die Hauptbereiche ξ durch Riemannsche Metriken $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2$ auf einem festgelegten Hauptbereich ξ_0 charakterisiert. Wenn ξ und ξ_0 topologisch äquivalent sind, so wird eine gegebene Abbildung $\xi \leftrightarrow \xi_0$ eine Klasse H von Abbildungen bestimmen, die aus jener Abbildung durch eine Deformation entstehen. Die durch diese Bedingung „topologisch festgelegten“ Klassen H bilden einen Überlagerungsraum R des oben erwähnten Raumes \mathfrak{R} . Die Punkte von R sind eindeutig den Metriken von ξ_0 zugeordnet, falls man zwei solche Metriken ds^2 und ds'^2 nicht als verschieden ansieht, welche durch eine Gleichung $ds'^2 = \lambda ds^2$ gebunden sind, wobei ds' und λ in einem Punkt von ξ_0 , ds in dem Bildpunkt jenes Punktes bestimmt werden, der mittels einer beliebigen, in die Identität deformierbaren Selbstabbildung A von ξ_0 erhalten wird. Das gestellte Extremalproblem ist so zurückgeführt auf die Auffindung einer Abbildung A der erwähnten Art, für welche das Maximum des Dilatationsquotienten möglichst klein ausfällt. — Diese Frage wird zunächst für die infinitesimalen quasikonformen Abbildungen gestellt und gelöst. Eine infinitesimale Selbstabbildung von ξ_0 wird von einem Vektor w bestimmt, der so beschaffen ist, daß $\frac{w}{dz}$ invariant ist, und der noch gewissen einfachen Randbedingungen genügt. Das Problem der extremalen infinitesimalen Abbildungen wird gelöst durch die Bestimmung einer komplexen Ortsfunktion B , für welche $B \frac{dz^2}{|dz|^2}$ invariant ist, so daß das Maximum von $|B|$ möglichst klein wird, wobei alle B zugelassen werden, die auseinander durch $B^* = B + \overline{w_x + i w_y}$ hervorgehen, wo w ein Verschiebungsvektor der erklärten Art ist. Für eine orientierte, geschlossene Fläche findet der Verf. als Extremale $c \frac{d\zeta^2}{|d\zeta|^2}$, wo $c \geq 0$ konstant und $d\zeta^2 \neq 0$ ein überall endliches quadratisches Differential ist. Für beliebige Hauptbereiche gilt Entsprechendes, falls man noch fordert, daß das quadratische Differential in den ausgezeichneten Punkten höchstens Pole erster Ordnung hat („reguläre“ Differentiale). Wenn σ die Anzahl der (reell) linear unabhängigen, regulären quadratischen Differentiale ist, so bilden die Klassen $B \frac{dz^2}{|dz|^2}$ einen linearen Raum der Dimension σ .

Es wird eine Dimensionsformel (Analogon des Riemann-Rochschen Satzes) aufgestellt zwischen σ und der Parameterzahl ρ der kontinuierlichen Gruppe der Selbstabbildungen eines Hauptbereichs \mathfrak{H} (Anzahlen von Henkeln, Kreuzhauben, Randkurven, ausgezeichneten Punkten). — Für endliche Abbildungen erhält der Verf. die gesuchten Extremalen aus den entsprechenden infinitesimalen Abbildungen unter Beibehaltung der Richtungsfelder. Die entsprechende Metrik ist $ds^2 = \lambda(|d\zeta|^2 + c\Re d\zeta^2)$. Dann läßt sich auch in R eine Metrik einführen. Bestimmt t ($0 \leq t \leq 1$) eine Kurve in R ,

so wird dieser die Länge $\int_0^1 c(t)dt$ zugeordnet. Der oben erwähnte Abstand zwischen zwei Punkten in R wird gleich der unteren Grenze der Bogenlängen aller verbindenden Kurven. Für die Geodätischen gelten interessante Sätze. Die einfachsten Fälle von Hauptbereichen werden noch eingehend diskutiert. Es folgen Betrachtungen über die konformen Abbildungen von Hauptbereichen auf sich und einige abschließende Bemerkungen über die Methode der quasikonformen Abbildungen, welche durch diese und andere Arbeiten des Verf. wesentlich gefördert worden ist. *Rolf Nevanlinna.*

Nisigaki, Hisami: Zur Theorie der Quaternionenfunktion. 2. Tôhoku Math. J. 47, 217—236 (1940).

Eine Quaternionenfunktion $Y = F(X)$ über dem Körper der reellen Zahlen, wo

$$X = x_0 i_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3, \quad Y = y_0 i_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3,$$

i_0, i_1, i_2, i_3 die Hamiltonschen Quaternioneneinheiten, $y_k = y_k(x_0, x_1, x_2, x_3)$ reell analytisch in den reellen x_i sind, heißt von der Klasse C_k , wenn

$$dY = \sum_{i=1}^k U^i dX V^i,$$

wobei U^1, \dots, U^k bzw. V^1, \dots, V^k linear unabhängig sind [siehe Teil I der Arbeit, Tôhoku Math. J. 45, 73—102 (1938); dies. Zbl. 20, 240]. — Verf. untersucht die Inversen zu den Funktionen $F(X)$ aus C_2 , ferner die Funktionen, die durch Ineinandersetzen von zwei solchen Funktionen entstehen, auf ihre Klassennummer. Schließlich werden die inneren Abbildungen durch spezielle Funktionen aus C_2 behandelt und damit Aussagen über die Entwickelbarkeit von $F(X)$ nach Potenzen von X verbunden. — Gelegentlich der Beweisführung werden Zusammenhänge mit den regulären Quaternionenfunktionen von Fueter aufgedeckt (siehe dessen Folge von Abhandlungen in Bd. 7—12 der Comment. math. helv.; dies. Zbl. 12, 17; 14, 167; 17, 76; 19, 174). *Behnke.*

Numerische und graphische Methoden.

Meineke, H.: Näherungsformel für die Berechnung von Strecken. Z. angew. Math. Mech. 20, 359 (1940).

Beweis, daß $\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{1,66b^2}{3a+b} (a > b)$. Höchstabweichung: 0,12%.

Rehbock (Braunschweig).

Jordan, Heinz, und Karl Schönbacher: Die doppeltverkettete Streuung von mehrphasigen Mehrlochwicklungen mit Durchmessertritt. Arch. Elektrotechn. 35, 185—192 (1941).

Anwendung des „Sprungstellenverfahrens“ von G. Koehler und A. Walther zur harmonischen Analyse [vgl. Arch. Elektrotechn. 25, 747—758 (1931); dies. Zbl. 3, 66].

Theodor Zech (Darmstadt).

Pellew, Anne, and R. V. Southwell: Relaxation methods applied to engineering problems. 6. The natural frequencies of systems having restricted freedom. Proc. roy. Soc., Lond. A 175, 262—290 (1940).

Zur genäherten Berechnung der Eigenfrequenzen kleiner Schwingungen bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden werden, ausgehend von einer angenommenen Schwingungsform, abwechselnd die Frequenz und die Schwingungsform sukzessiv verbessert. Die gesuchte Frequenz wird in Schranken eingeschlossen; als obere Schranke dient das Rayleighsche Prinzip; eine untere Schranke wird aus dem Satz gewonnen,

daß bei Hinzufügung von Massen sämtliche Frequenzen des Systems nur sinken können. Ein ausführliches numerisches Beispiel behandelt Torsionsschwingungen einer Welle mit 6 aufgesetzten Drehmassen. Dämpfungen können näherungsweise berücksichtigt werden. Stetige Systeme werden durch Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden angenähert, so z. B. ein schwingender Stab durch mehrere Einzelmassen. *Collatz.*

Stange, K.: Zur Berechnung einer Flugbahnschar nach dem Athenschen Verfahren. Z. angew. Math. Mech. 20, 350—357 (1940).

In Ergänzung einer früheren Arbeit [Interpolationsverfahren zur Berechnung von Flugbahnscharen und ihrer Veränderung durch Variation der ballistischen Grundwerte. Z. angew. Math. Mech. 19, 361—371 (1939)] leitet Verf. nach einem von H. Athen herrührenden Näherungsverfahren zwei Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Netzzahlen dreier Flugbahnen ab, um aus den für zwei Flugbahnen bekannten Netzzahlen die Werte einer beliebigen dritten Bahn durch „Zwischenschalten“ zu gewinnen. Das Verfahren soll bei einem Minimum von Rechenaufwand für Erd- und Luftschußtafeln zu einem genauen Entwerfen vorläufiger Flugbahnschaubilder dienen. *Garten.*

Athen, Hermann: Zusehrift zu: R. Sauer: Über Interpolation von Kurvenscharen mit Anwendung auf die Berechnung von Geschößflugbahnen. [Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 280 bis 284]. Z. angew. Math. Mech. 21, 63 (1941).

In der im Titel genannten Arbeit von R. Sauer (dies. Zbl. 24, 267) haben die Funktionen $\xi(t, \lambda)$ und $\eta(t, \lambda)$ die Eigenschaft, daß für $t = 0$ die Werte bis zur zweiten Ableitung nach t von λ unabhängig sind. Verf. weist darauf hin, daß man den Sauer-schen Gedanken verallgemeinern und durch geeignete Transformationen diese Eigenschaft bis zu Ableitungen beliebig hoher Ordnung n erreichen kann. Hierdurch wird die Genauigkeit des Interpolationsverfahrens weiter gesteigert. Geht man z. B. im Fall der außenballistischen Gleichungen bis $n = 3$, so sinkt der Interpolationsfehler gegenüber dem Fall $n = 2$ etwa auf die Hälfte. Die Verwendung größerer Werte von n ist praktisch meist nicht möglich, da die Rechnungen zu unübersichtlich werden.

Werner Schulz (Berlin).

● **Stumpff, Karl: Ermittlung und Realität von Periodizitäten. Korrelationsrechnung.** (Handbuch d. Geophys. Bd. 10, Liefg. 1.) Berlin: Gebr. Bornträger 1940. IV, 117 S. RM. 20.—.

Tafeln zur Übertragung geographischer Koordinaten auf dem internationalen Erdellipsoide im Bereich 35° bis 71° Breite. Balt. Geodät. Kommission, Sonderveröff. Nr 9, 1—53 (1941).

Die Tafeln bezwecken die einheitliche Berechnung der Triangulationen der an die Baltische Geodätische Kommission angeschlossenen Staaten, sind darüber hinaus aber auf solche Breiten ausgedehnt (Erweiterung nach Süden der Tafeln von Väisälä), daß sie für ganz Europa ausreichen. Sie sind auf das von der Section de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale im Jahre 1924 festgesetzte Erdellipsoid mit den Grunddimensionen $a = 6378388$ m (große Halbachse) und $p = 1:297$ (Abplattung) bezogen. Die Lösung der Hauptaufgabe, nämlich aus der Breite φ des gegebenen Punktes und aus der Länge s und dem Azimut A der geodätischen Linie nach dem gesuchten Punkte die Berechnung der Breite φ' des gesuchten Punktes, den Längenunterschied l beider Punkte und das Gegenazimut A' im gesuchten Punkte herzuleiten, richtet sich nach den alten Formeln von Schreiber mit kleinen Modifikationen, hauptsächlich nach Krüger. In einer Einleitung werden die hier auftretenden Formeln mit den eingehenden Konstanten und Hilfsfunktionen ausführlich besprochen, wobei die logarithmische Rechnung weitgehend durch Tabulierung ersetzt wird. Zur Berechnung der Tabellen, die im Auftrage des Präsidiums der Baltischen Geodätischen Kommission von V. R. Ölander ausgeführt wurde, werden nähere Angaben über den Rechengang, über Genauigkeit und Kontrollen gemacht. Ein Zahlenbeispiel und Rechenmuster (Beispiel 7 nach Schreiber) erläutert die Anwendung der Tabellen und die praktische Ausführung der Rechnungen. *Feyer.*